Поэтому, зная решения ДУ Риккати (41), можно посредством ДУ (43) получить решение системы ДУ Шредингера (44) (как это делалось в работах [1-4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А.В.* Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1997. 77 с.
2. *Бородин А.В.* Бариоперационное исчисление и *N*-мерное уравнение Риккати // Математика и мат. образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1999. С. 7-18.
3. *Бородин А.В.* Бариоперационное исчисление и *N*-мерное изоспектральное уравнение Шредингера // Вестник Яросл. гос. техн. ун-та: сб. науч. тр. Вып 2. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1999. С. 200-2004.
4. *Бородин А.В.* Многомерный барианализ и его приложения. Ч. I. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 432 с.
5. *Бородин А.В.* Частично квазисвязные множества и барианализ (приложения). Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. 484 с.
6. *Бородин А.В.* Об одном классе кватернионных алгебраических уравнений // Математика и мат. образование. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. С. 5-16.
7. *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Изд-во «Наука», Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1979. 624 с.
8. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. 368 с.
9. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. М.: Наука, 1986. 400 с.

УДК 511.528.2

Т. П. Гой, Р. А. Заторский

Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника
Украина, г. Ивано-Франковск, *e-mail: tarasgoy@yahoo.com*

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Показаны возможности использования систем линейных рекуррентных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами для решения квадратных диофантовых уравнений.

Ключевые слова: *квадратное диофантово уравнение, рекуррентное уравнение, уравнение Пелля.*

T. P. Goy, R. A. Zatorsky

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
Ukraine, Ivano-Frankivsk, e-mail: tarasgoy@yahoo.com

SOLVING OF QUADRATIC DIOPHANTINE EQUATIONS USING SYSTEMS OF LINEAR RECURRENCE EQUATIONS

We have shown the possibility of using systems of linear second order recurrence equations with constant coefficients for solving quadratic Diophantine equations.

Keywords: *quadratic Diophantine equation, recurrence equation, Pell's equation.*

Квадратное диофантово уравнение

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \tag{1}$$

изучалось многими авторами, которые для его решения использовали квадратичные формы, цепные дроби и другие методы [1, 3, 5-8]. Частными случаями уравнения (1) являются широко известное уравнение Пелля $x^2 - ny^2 = 1$ и обобщенное уравнение Пелля

$$x^2 - ny^2 = d\,,$$

где n – натуральное число, не являющееся квадратом [2, 4].

Для решения уравнения (1) эффективным является использование систем рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами.

Решение уравнения (1) будем искать с помощью системы линейных рекуррентных уравнений второго порядка вида

$$\begin{cases} x_{k+2} = \alpha x_{k+1} + \beta x_k, \\ y_{k+2} = \alpha y_{k+1} + \beta y_k, \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, с начальными условиями x_1, x_2 и y_1, y_2 соответственно.

Очевидно, что если (x, y) является решением уравнения (1), то пара $(-x, -y)$ также будет решением этого уравнения.

Пусть решения (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, k+1$, системы (2) удовлетворяют уравнению (1). Определим условия, при которых пара (x_{k+2}, y_{k+2}) также будет решением этого уравнения. Подставляя (2) в (1), имеем

$$\alpha^2 (ax_{k+1}^2 + bx_{k+1}y_{k+1} + cy_{k+1}^2) + \beta^2 (ax_k^2 + bx_k y_k + cy_k^2) +$$
$$+ 2\alpha\beta(ax_k x_{k+1} + cy_k y_{k+1}) + \alpha\beta b(x_{k+1}y_k + x_k y_{k+1}) = d,$$

откуда

$$\alpha\beta G(k) = d(1-\alpha^2-\beta^2), \tag{3}$$

где $$G(k) = 2(ax_k x_{k+1} + cy_k y_{k+1}) + b(x_{k+1}y_k + x_k y_{k+1}).$$

Если в (3) положить $\beta = -1,$ то

$$G(k) = \alpha d,$$

а при $k = 1$ имеем

$$2(ax_1x_2 + cy_1y_2) + b(x_2y_1 + y_2x_1) = \alpha d. \tag{4}$$

Суммируя теперь равенство (4) с очевидными равенствами

$$ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 = d,$$

$$ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 = d,$$

получаем тождество

$$a(x_1+x_2)^2 + b(x_1+x_2)(y_1+y_2) + c(y_1+y_2)^2 = (2+\alpha)d. \tag{5}$$

Если число

$$s \equiv \frac{a(x_1+x_2)^2 + b(x_1+x_2)(y_1+y_2) + c(y_1+y_2)^2}{d} \tag{6}$$

является целым, то из (5) находим второй коэффициент системы (2):

$$\alpha = s - 2.$$

Таким образом, нами доказано следующее утверждение:

Теорема. *Пусть* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2) *– два последовательные целые решения уравнения* (1). *Если число s, определенное формулой* (6), *целое, то все решения* (x_n, y_n), $n \ge 3$, *уравнения* (1) *описываются с помощью системы рекуррентных уравнений*

$$x_{k+2} = (s-2)x_{k+1} - x_k, \quad y_{k+2} = (s-2)y_{k+1} - y_k. \tag{7}$$

П р и м е р 1. Для квадратного диофантового уравнения $x^2 + 2xy - y^2 = 7$ имеем $x_1 = 2,\ y_1 = 1,\ x_2 = 4,\ y_2 = 9$. По формуле (6) находим $s = 8$. Тогда из (7) получаем, что решения (x_n, y_n) заданного уравнения определяются с помощью системы рекуррентных линейных уравнений

$$x_{k+2} = 6x_{k+1} - x_k, \quad x_1 = 2,\ x_2 = 4;$$

$$y_{k+2} = 6y_{k+1} - y_k, \quad y_1 = 1,\ y_2 = 9.$$

П р и м е р 2. Рассмотрим уравнение $5x^2 + 15xy + 11y^2 = -19$. Легко проверить, что $x_1 = 13,\ y_1 = 9,\ x_2 = -21,\ y_2 = 16.$ Из (6) находим число $s = 5$, а из (7) получаем, что решения заданного уравнения определяются системой рекуррентных уравнений

$$x_{k+2} = 3x_{k+1} - x_k, \quad x_1 = 13,\ x_2 = -21;$$

$$y_{k+2} = 3y_{k+1} - y_k, \quad y_1 = 9,\ y_2 = 16.$$

П р и м е р 3. Для обобщенного уравнения Пелля $x^2 - 6y^2 = 9$ в качестве последовательных решений берем $x_1 = 3,\ y_1 = 0$ и $x_2 = 15,\ y_2 = 6.$ Тогда $s = 12$, а из (7) получаем соответствующую систему рекуррентных уравнений:

$$x_{k+2} = 10x_{k+1} - x_k,\ \ x_1 = 3,\ x_2 = 15;$$
$$y_{k+2} = 10y_{k+1} - y_k,\ \ y_1 = 0,\ y_2 = 6.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Andreescu T.* Quadratic Diophantine Equations / T. Andreescu, D. Andrica. Springer, 2015. 222 p.
2. *Barbeau E.J.* Pell's Equation. Springer-Verlag, 2003. 224 p.
3. *Bitim B.D.* On solutions of indefinite binary quadratic form $au^2 + buv + cv^2 = m$ / B.D. Bitim, E. Özel // Int. J. Algebra. 2014. Vol. 8 (18). P. 889-894.
4. *Jacobson M.J.* Solving the Pell Equation / M.J. Jacobson, H.C. Williams. Springer, 2009. 502 p.
5. *Keskin R.* Solutions of some quadratic Diophantine equations // Comput. Math. Appl. 2010. Vol. 60 (8). P. 2225-2230.
6. *Matthews K.R.* Lagrange's algorithm revisited: solving $at^2 + btu + cu^2 = n$ in the case of negative discriminant // J. Integer Seq. 2014. Vol. 17. Article 14.11.1.
7. *Matthews K.R.* On fundamental solutions of binary quadratic form equations / K.R. Matthews, J.P. Robertson, A. Srinivasan // Acta Arith. 2015. Vol. 169. P. 291-299.
8. *Mollin R.A.* Continued fractions, Jacobi symbols, and quadratic Diophantine equations / R.A. Mollin, A.J. van der Poorten // Canad. Math. Bull. 2000. Vol. 43 (2), P. 218-225.

УДК 517.988.52

Н. М. Гулевич

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова
Россия, г. Санкт-Петербург, *e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com*

УСЛОВИЕ ФРУМ-КЕТКОВА И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ НЕРАСТЯГИВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Доказывается теорема о существовании неподвижной точки нерастягивающего отображения, удовлетворяющего условию Фрум-Кеткова.

Ключевые слова: *неподвижная точка, нерастягивающее отображение, условие Фрум-Кеткова, гильбертово пространство, метрическая проекция.*