$$\left|L(\lambda)\right| > \rho\left(\lambda, \lambda_n\right) \cdot \exp\left[(\beta - \varepsilon_1)\left|\lambda\right|^{\rho}\right]$$

и необходимость условия (7) доказана. Аналогично доказывается и достаточность условия (7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев, А.Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. *Леонтьев, А.Ф.* Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами / А.Ф. Леонтьев, Ю.Н. Фролов. Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1978. Т.42, №4. С. 763-772.
3. *Гилемьянов, А.И.* О представлении целых функций обобщенными рядами экспонент // Исследования по теории аппроксимации функций. Уфа: БФАН СССР. 1979. С. 53-70.
4. *Гилемьянов, А.И.* Об условиях представимости целых функций некоторыми общими рядами // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа: БФАН СССР. 1980. С.16-26.
5. *Иванов, М.С.* Условия представления целых функций некоторыми общими рядами в различных топологиях // Вопросы аппроксимации функций комплексного переменного. Уфа: БФАН СССР. 1980. С.69-76.

УДК 517.588/.589

Т. П. Гой

Прикарпатский национальный университет
им. Василия Стефаника,
Украина, г. Ивано-Франковск, *e-mail:* tarasgoy@yahoo.com

О ЦЕНТРАЛЬНЫХ ФАКТОРИАЛЬНЫХ СТЕПЕНЯХ И НЕКОТОРЫХ ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

Изучаются две неэлементарные функции действительной переменной, построенные с использованием центральных факториальных степеней. Установлены некоторые свойства этих функций, в частности, показана их связь с обобщенными гипергеометрическими функциями. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются новые функции.

Ключевые слова: *факториальная степень, центральная факториальная степень, обобщенная гипергеометрическая функция, задача Коши.*

T. P. Goy

Vasyl Stefanyk Subcarpathian National University,
Ukraine, Ivano-Frankivsk, e-mail: tarasgoy@yahoo.com

ON CENTRAL FACTORIAL POWERS AND THEIR APPLICATION

We consider two new real-valued functions defined by central factorial powers. e Some of their main properties are found. In particular, we established a relationship of these functions with the generalized hypergeometric functions. It is shown that constructed functions are solutions of ordinary differential equations derived in the paper.

Keywords: *factorial power, central factorial power, generalized hypergeometric function, the Cauchy problem.*

Вступление. Математические модели многих процессов и явлений приводят к задачам, точные решения которых получить классическими методами невозможно. Расширение "библиотеки" неэлементарных функций приводит к необходимости расширения круга задач, которые могут быть решены в замкнутом виде.

Классические трансцендентные функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаются как степенные ряды

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

которые построены при помощи убывающих степеней (факториал является убывающей факториальной степенью). Заменив в этих рядах убывающие факториальные степени соответствующими центральными факториальными степенями, в [2, 3] построены и изучены новые неэлементарные функции действительной переменной $\mathrm{Expc}(x)$, $\mathrm{Sinc}\,(x)$, $\mathrm{Cosc}\,(x)$. В частности, в [2] показано, что функции $\mathrm{Sinc}(x)$, $\mathrm{Cosc}\,(x)$ являются решениями задач Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с полиномиальными коэффициентами.

В этой статье изучаются две новые неэлементарные функции действительной переменной типа гиперболических функций

$$\mathrm{Shc}(x)=\frac{\mathrm{Expc}(x)-\mathrm{Expc}(-x)}{2},\quad \mathrm{Chc}(x)=\frac{\mathrm{Expc}(x)+\mathrm{Expc}(-x)}{2}.$$

Эта статья идейно близка к предыдущим работам автора [4, 5].

Факториальные степени. Для произвольных чисел $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ *факториальной степенью m* с шагом $k \in \mathbf{R}$ называют выражение [6]

$$x^{m\{k\}} = x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot\big(x+(m-1)k\big).$$

Факториальную степень называют *возрастающей*, если $k>0$, и *убывающей*, если $k<0$. В случае $k=0$ имеем обыкновенную степень, т.е. $x^{m\{0\}} = x^m$.

Возрастающую факториальную степень m с шагом 1 и убывающую факториальную степень m с шагом (– 1) будем обозначать как $x^{\overline{m}}$ и $x^{\underline{m}}$ соответственно:

$$x^{\overline{m}} := x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),\ x^{\underline{m}} := x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Возрастающие и убывающие факториальные степени тесно связаны с факториальной функцией, а именно $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Для произвольных чисел $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ *центральной факториальной степенью m* с шагом $k>0$ называют выражение

$$x^{m[k]} = x\left(x+\frac{mk}{2}-k\right)\left(x+\frac{mk}{2}-2k\right)\cdots\left(x-\frac{mk}{2}+k\right).$$

Центральную факториальную степень m с шагом 1 будем обозначать как $x^{[m]}$, например,

$$x^{3[1]} := x^{[3]} = (x-1/2)\,x\,(x+1/2),\ x^{4[1]} := x^{[4]} = (x-1)\,x^2\,(x+1).$$

Функции $\mathbf{Expc}(x)$, $\mathbf{Sinc}(x)$, $\mathbf{Cosc}(x)$. Обозначим через $\mathrm{Expc}(x)$, $\mathrm{Sinc}(x)$, $\mathrm{Cosc}(x)$ соответственно функции действительной переменной, определенные при помощи степенных рядов

$$\mathrm{Expc}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^{[n]}} = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^3}{\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{7}{2}}+\frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5}+\ldots, \tag{1}$$

$$\mathrm{Sinc}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}} = \frac{x}{1}-\frac{x^3}{\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{7}{2}}+\frac{x^5}{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 5\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}}-\ldots, \tag{2}$$

$$\mathrm{Cosc}\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}} = 1-\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\ldots. \tag{3}$$

На рис. 1, 2 построены графики этих функций (на рис. 1 пунктиром изображена асимптота $y=-0,5$).

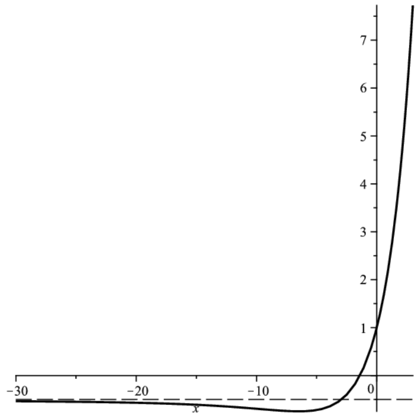

Рис. 1. График функции $y = \mathrm{Expc}(x)$

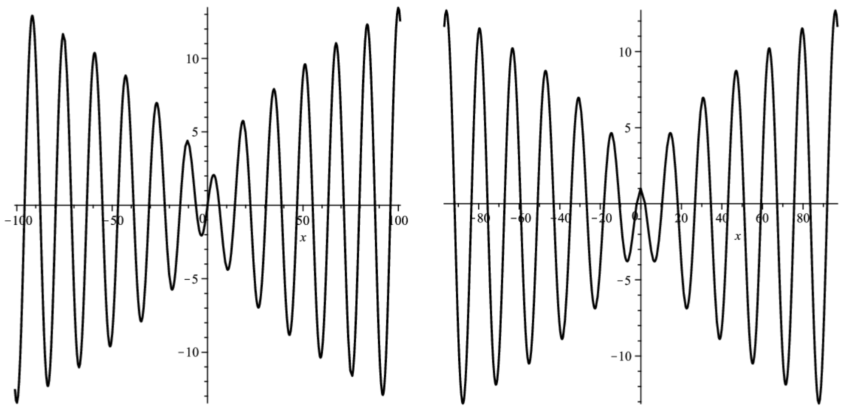

Рис. 2. Графики функции $y = \mathrm{Sinc}(x)$ **(слева) и** $y = \mathrm{Cosc}(x)$ **(справа)**

Функции Shc(*x*), Chc(*x*). Обозначим через $\mathrm{Shc}(x)$, $\mathrm{Chc}(x)$ функции действительной переменной, определенные с помощью формул

$$\mathrm{Shc}\,(x) = \frac{\mathrm{Expc}(x) - \mathrm{Expc}(-x)}{2},$$

$$\mathrm{Chc}\,(x) = \frac{\mathrm{Expc}(x) + \mathrm{Expc}(-x)}{2}.$$

Легко показать, что

$$\operatorname{Shc}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}}=x+\frac{x^3}{\frac{5}{2}\cdot 3\cdot\frac{7}{2}}+\frac{x^5}{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot 5\cdot\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{2}}+\ldots, \qquad (4)$$

$$\operatorname{Chc}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}=1+\frac{x^2}{2\cdot 2}+\frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 4\cdot 5}+\frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\ldots, \qquad (5)$$

причем оба ряда в (4), (5) сходятся для всех действительных x.

Графики функций $y=\operatorname{Shc}(x)$ и $y=\operatorname{Chc}(x)$ построены на рис. 3.

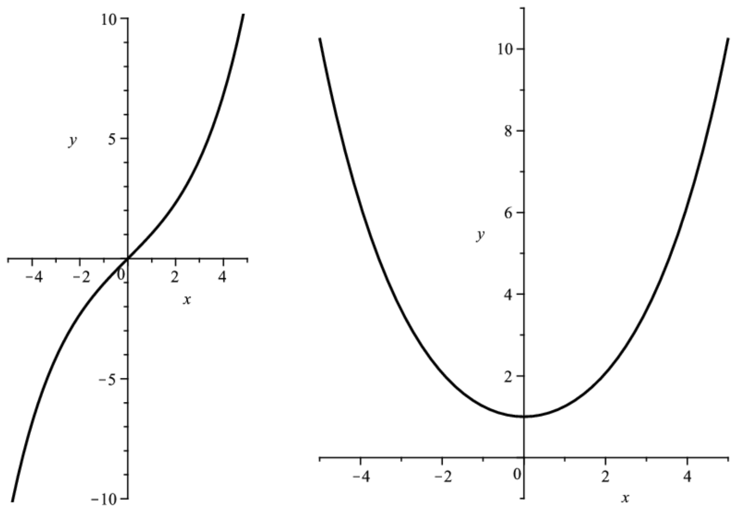

Рис. 3. Графики функций $y=\operatorname{Shc}(x)$ (слева) и $y=\operatorname{Chc}(x)$ (справа)

Пусть ${}_1F_2\left(a_1;b_1,b_2;z\right)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, т.е. функция, определенная как сумма обобщенного гипергеометрического ряда [1]

$${}_1F_2\left(a_1;b_1,b_2;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\,b_2^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!}. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Для всех* $x\in(-\infty;\infty)$ *выполняются тождества*

$$\operatorname{Shc}(x)=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};\frac{x^2}{27}\right),\ \operatorname{Chc}(x)=1+\frac{x^2}{4}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};\frac{x^2}{27}\right). \qquad (7)$$

Доказательство теоремы 1 непосредственно следует из формул (4) – (6).

Теорема 2. *Функции* $\operatorname{Shc}(x)$, $\operatorname{Chc}(x)$ *являются решениями соответственно таких задач Коши для линейных дифференциальных уравнений третьего порядка*:

$$27x^3 y''' + 4x(6-x^2)y' - 4(x^2+6)y = 0, \quad y(0)=0, \ y'(0)=1, \ y''(0)=0;$$

$$27x^3 y''' - 27x^2 y'' + x(51-4x^2)y' - 48y = -48, \quad y(0)=1, y'(0)=0, y''(0)=0,5.$$

Доказательство теоремы 2 основывается на том, что обобщенная гипергеометрическая функция ${}_1F_2\left(a_1; b_1, b_2; z\right)$, через которую, в соответствии с (7), выражаются функции $\operatorname{Shc}(x)$, $\operatorname{Chc}(x)$, является решением обыкновенного дифференциального уравнения [1]

$$\left(\delta\left(\delta+b_1-1\right)\left(\delta+b_2-1\right)-z\left(\delta+a_1\right)\right)w(z)=0,$$

где δ – дифференциальный оператор $\delta w = zw'(z)$.

Учитывая формулы (1) – (5), устанавливаем следующие соотношения между рассматриваемыми функциями:

$$\operatorname{Chc}(ix) = \operatorname{Cosc}(x), \ \operatorname{Shc}(ix) = i\operatorname{Sinc}(x),$$

$$\operatorname{Chc}^2(x) - \operatorname{Shc}^2(x) = \operatorname{Expc}(ix)\cdot\operatorname{Expc}(-ix).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. М.: Наука, 1973. 294 с.
2. *Гой, Т.П.* Про диференціальні рівняння функцій, породжених центральними факторіальними степенями // КММК – 2013: тез. Крымской междунар. мат. конф. Т. 2. Симферополь: Изд-во КНЦ НАНУ, 2013. С. 4–5.
3. *Гой, Т.П.* Функції, породжені центральними факторіальними степенями // Теоретичні і прикладні проблеми технічних і математичних наук : матер. Міжнар. наук.-практ. конф. Киев: Центр Науково-Практичних Студій, 2014. С. 8–13.
4. *Гой, Т.П.* Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський мат. журн. 2013. Т.1, № 1-2. С. 28-33.
5. *Goy, T.P.*New integral functions generated by rising factorial powers // Carpathian Mathematical Publications. 2013. 5 (2). P. 217-224.
6. *Jordan, C.* Calculus of Finite Differences. New York: Chelsea Publishing, 1939. 652 p.