4. *Галаев С.В.* Геометрическая интерпретация тензора кривизны Вагнера для случая многообразия с контактной метрической структурой // Сибирский мат. журн.. 2016. Т.57, №3. С. 632-640.
5. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические пространства с N-связностью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 3. С.258-264.
6. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263-272.
7. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, №3. С. 53-63.
8. *Галаев С.В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Matемематика. 2017. №3. С. 1-10.
9. *Букушева А.В.* О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12-14.
10. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138-147.
11. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40. С. 20-24.

УДК 511.176

Т. П. Гой

Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника
Украина, г. Ивано-Франковск, *e-mail: tarasgoy@yahoo.com*

О НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ДИКСОНА

Изучены семейства определителей матриц Теплица-Хессенберга, элементами которых являются многочлены Диксона первого и второго рода. Как следствие, получены новые формулы с мультиномиальными коэффициентами для многочленов Диксона.

Ключевые слова: *матрица Теплица-Хессенберга, многочлен Диксона, мультиномиальный коэффициент.*

T.P. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
Ukraine, Ivano-Frankivsk, e-mail: tarasgoy@yahoo.com

ON SOME FORMULAS FOR DICKSON POLYNOMIALS

We study some families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Dickson polynomials of the first and second kinds. This leads us to discover new identities for Dickson polynomials with multinomial coefficients.

Keywords: *Toeplitz-Hessenberg matrix, Dickson polynomial, multinomial coefficient.*

Многочлены Диксона и некоторые их свойства. *Многочлены Диксона первого рода* $D_n(x,\alpha)$ определяются с помощью формул [1, 2]

$$D_0(x,\alpha)=2,\qquad D_n(x,\alpha)=\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{n}{n-i}\binom{n-i}{i}(-\alpha)^i x^{n-2i},$$

где $n\geq 1$, $\binom{m}{k}=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ – биномиальный коэффициент; $\lfloor s\rfloor$– наибольшее целое число, не превышающее s.

Первые несколько многочленов Диксона первого рода имеют вид:

$$D_0(x,\alpha)=2,\quad D_1(x,\alpha)=x,\quad D_2(x,\alpha)=x^2-2\alpha,\quad D_3(x,\alpha)=x^3-3\alpha x,$$

$$D_4(x,\alpha)=x^4-4\alpha x^2+2\alpha^2,\quad D_5(x,\alpha)=x^5-5\alpha x^3+5\alpha^2 x.$$

Многочлены $D_n(x,\alpha)$ также могут быть заданы с помощью рекуррентного соотношения второго порядка

$$D_n(x,\alpha)=xD_{n-1}(x,\alpha)-\alpha D_{n-2}(x,\alpha),\quad n\geq 2, \tag{1}$$

с начальными условиями $D_0(x,\alpha)=2$ и $D_1(x,\alpha)=x$.

Многочлены Диксона второго рода $E_n(x,\alpha)$ определяются с помощью формулы [1, 2]

$$E_n(x,\alpha)=\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-i}{i}(-\alpha)^i x^{n-2i},\quad n\geq 0.$$

Первые несколько многочленов Диксона второго рода имеют вид:

$$E_0(x,\alpha)=1,\quad E_1(x,\alpha)=x,\quad E_2(x,\alpha)=x^2-\alpha,\quad E_3(x,\alpha)=x^3-2\alpha x,$$

$$E_4(x,\alpha)=x^4-3\alpha x^2+\alpha^2,\quad E_5(x,\alpha)=x^5-4\alpha x^3+3\alpha^2 x.$$

Эти многочлены также могут быть заданы с помощью рекуррентного соотношения

$$E_n(x,\alpha)=xE_{n-1}(x,\alpha)-\alpha E_{n-2}(x,\alpha),\quad n\geq 2,$$

где $E_0(x,\alpha)=1$, $E_1(x,\alpha)=x$.

Многочлены Диксона обладают интересными алгебраическими и теоретико-числовыми свойствами [1, 2]. Например, многочлены $D_n(x,\alpha)$ удовлетворяют правилу композиции

$$D_{mn}(x,\alpha) = D_m\left(D_n(x,\alpha), \alpha^n\right).$$

Кроме того, $D_n(x,\alpha)$ – единственные многочлены, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$D_n\left(u+\alpha/u, \alpha\right) = u^n + \left(\alpha/u\right)^n, \quad u \neq 0.$$

Многочлены $E_n(x,\alpha)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$E_n\left(u+\alpha/u, \alpha\right) = \frac{u^{n+1} - \left(\alpha/u\right)^{n+1}}{u - \alpha/u},$$

где $u \neq 0$ и $u^2 \neq \alpha$.

Многочлены Диксона связаны с многочленами Чебышева первого рода $T_n(x)$ и многочленами Чебышева второго рода $U_n(x)$ с помощью формул

$$D_n(2x,1) = 2T_n(x), \qquad E_n(2x,1) = U_n(x).$$

Многочлены Диксона находят широкое применение в алгебре, криптологии, комбинаторике [3–10].

Определители матриц Теплица-Хессенберга специального вида. *Нижней матрицей Теплица-Хессенберга* n-го порядка называется матрица вида

$$A_n \equiv A_n(a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Определитель матрицы Теплица-Хессенберга можно найти, используя рекуррентную формулу [11]

$$\det A_n = \sum_{i=1}^{n} (-a_0)^{i-1} a_i \det A_{n-i}, \tag{2}$$

где, по определению, $\det A_0 = 1$.

По *формуле Труди* определитель матрицы Теплица-Хессенберга можно выразить через ее элементы [12], а именно

$$\det A_n = \sum_{s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n} (-a_0)^{n-(s_1+\cdots+s_n)} \frac{(s_1 + \cdots + s_n)!}{s_1! \cdots s_n!} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{3}$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным числам s_i таким, что $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$

Для удобства далее будем обозначать

$$\det(a_0; a_1, a_2, ..., a_n) \equiv \det\left(A_n(a_0; a_1, a_2, ..., a_n)\right).$$

Рассмотрим некоторые последовательности матриц Теплица-Хессенберга $\{A_n\}_{n\ge1}$, элементами которых являются многочлены Диксона первого рода.

Теорема 1. *Пусть* $D_m \equiv D_m(x,\alpha)$ *– многочлены Диксона первого рода. Тогда*

$$\det(1; D_1, D_2, ..., D_n) = \begin{cases} 2\alpha^m, & \text{если } n = 2m, \\ \alpha^{m-1}x, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \quad n \ge 1,$$

$$\det(1; D_2, D_4, ..., D_{2n}) = \begin{cases} 2\alpha^n, & \text{если } n = 2m, \\ (x^2-2\alpha)\alpha^{n-1}, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \quad n \ge 1,$$

$$\det(D_1; D_2, D_3, ..., D_{n+1}) = (-\alpha)^{n-1}2^{n-2}(x^2-4\alpha), \quad n \ge 2, \tag{4}$$

$$\det(D_1; D_3, D_5, ..., D_{2n+1}) = (-\alpha)^{n-1}x^n(x^2-4\alpha), \quad n \ge 2.$$

Доказательство. Мы докажем только формулу (4). Доказательства остальных формул этой теоремы аналогичны. Используем метод математической индукции по *n*. Для $n = 2$ и $n = 3$ формула (4), очевидно, выполняется. Предположим, что она справедлива для всех $n-1$ и докажем ее справедливость при $n \ge 3$.

Пусть

$$P_n = \det(D_1; D_2, D_3, ..., D_{n+1}).$$

Из (4), используя (2), получаем разложение

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} (-x)^{i-1} D_{i+1} P_{n-i}. \tag{5}$$

Теперь из (5), учитывая рекуррентное соотношение (1), имеем:

$$P_n = D_2 P_{n-1} + \sum_{i=2}^{n} (-x)^{i-1}\left(xD_i - \alpha D_{i-1}\right)P_{n-i} =$$

$$= (x^2-2\alpha)P_{n-1} + x\sum_{i=2}^{n}(-x)^{i-1}D_i P_{n-i} - \alpha\sum_{i=2}^{n}(-x)^{i-1}D_{i-1}P_{n-i} =$$

$$= (x^2-2\alpha)P_{n-1} + x\sum_{i=1}^{n-1}(-x)^{i}D_{i+1} P_{n-i-1} - \alpha\sum_{i=0}^{n-2}(-x)^{i+1}D_{i+1}P_{n-i-2} =$$

$$= (x^2-2\alpha)P_{n-1} - x^2\sum_{i=1}^{n-1}(-x)^{i-1}D_{i+1} P_{n-i-1} - \alpha\left(-xD_1P_{n-2}x^2\sum_{i=1}^{n-2}(-x)^{i-1}D_{i+1}P_{n-i-2}\right) =$$

$$= (x^2 - 2\alpha)P_{n-1} - x^2 P_{n-1} + \alpha x^2 P_{n-2} - \alpha x^2 P_{n-2} = -2\alpha P_{n-1} =$$
$$= -2\alpha(-\alpha)^{n-2} 2^{n-3}(x^2 - 4\alpha) = (-\alpha)^{n-1} 2^{n-2}(x^2 - 4\alpha).$$

Таким образом, формула (4) справедлива для n. Теорема доказана.

Аналогично рассмотрим четыре семейства определителей матриц Хессенберга-Теплица, элементами которых являются многочлены Диксона второго рода.

Теорема 2. *Пусть* $E_m \equiv E_m(x,\alpha)$ *– многочлены Диксона второго рода. Тогда для всех* $n \geq 2$ *имеют место тождества*

$$\det(1; E_1, E_2, ..., E_n) = \alpha\delta_{n2},$$
$$\det(1; E_2, E_4, ..., E_{2n}) = \alpha^{n-1}x^2,$$
$$\det(E_1; E_2, E_3, ..., E_{n+1}) = (-\alpha)^n,$$
$$\det(E_1; E_3, E_5, ..., E_{2n+1}) = \alpha^2 x^2 \delta_{n2},$$

где δ_{n2} *– символ Кронекера.*

Доказательство формул теоремы производится с помощью математической индукции по n, аналогично доказательству формулы (4).

Основной результат. Используя теперь формулу Труди (3), как следствие формул теорем 1 и 2, после несложных преобразований получаем следующие формулы, выражающие суммы произведений многочленов Диксона первого и второго рода с мультиномиальными коэффициентами.

Теорема 3. *Пусть* $n \geq 1$, *кроме указанных случаев. Тогда*

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) D_1^{s_1} D_2^{s_2} \cdots D_n^{s_n} = \begin{cases} 2\alpha^m, & \text{если } n = 2m, \\ -\alpha^{m-1}x, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases} \tag{6}$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) D_2^{s_1} D_4^{s_2} \cdots D_{2n}^{s_n} = \begin{cases} 2\alpha^n, & \text{если } n = 2m, \\ (2\alpha - x^2)\alpha^{n-1}, & \text{если } n = 2m-1, \end{cases}$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) D_2^{s_1} D_3^{s_2} \cdots D_{n+1}^{s_n} = \alpha^{n-1} 2^{n-2} \frac{4\alpha - x^2}{x^n}, \quad n \geq 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) D_3^{s_1} D_5^{s_2} \cdots D_{2n+1}^{s_n} = \alpha^{n-1}(4\alpha - x^2), \quad n \geq 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) E_1^{s_1} E_2^{s_2} \cdots E_n^{s_n} = \alpha(-1)^n \delta_{n2}, \quad n \geq 2, \tag{7}$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} p_n(s) E_2^{s_1} E_4^{s_2} \cdots E_{2n}^{s_n} = (-1)^n \alpha^{n-1} x^2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) E_2^{s_1} E_3^{s_2} \cdots E_{n+1}^{s_n} = \alpha^n x^{-n},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\Omega_n} x^{-\Omega_n} p_n(s) E_3^{s_1} E_5^{s_2} \cdots E_{2n+1}^{s_n} = (-1)^n \alpha^2 x^{2-n} \delta_{n2}, \quad n \geq 2, \quad (8)$$

где $\Omega_n = s_1 + \cdots + s_n$, $p_n(s) = \dfrac{(s_1 + \cdots + s_n)!}{s_1! \cdots s_n!}$.

Пример. Из формул (6), (7) и (8) при $n = 3, 4, 5$ соответственно получаем тождества

$$D_1^3 - 2D_1D_2 + D_3 = \alpha x,$$

$$E_1^4 - 3E_1^2E_2 + 2E_1E_3 + E_2^2 - E_4 = 0,$$

$$E_3^5 - 4E_1E_3^3E_5 + 3E_1^2E_3^2E_7 + 3E_1^2E_3E_5^2 - 2E_1^3E_3E_9 - 2E_1^3E_5E_7 + E_1^4E_{11} = 0.$$

Замечание. Формулы, аналогичные формулам из теоремы 3, для чисел Фибоначчи, Люка, Пелля, Якобсталя, Якобсталя-Люка, Каталана, трибоначчи получены нами в [13–19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lidl R.* Dickson Polynomials / R. Lidl, G. L. Mullen, G. Turnwald. Harlow, Essex (England): Longman Scientific and Technical, 1993. 207 p.
2. *Mullen G.L.* Handbook of Finite Fields / G.L. Mullen, D. Panario. Chapman and Hall/CRC, 2013. 1068 p.
3. *Barbero S.* Dickson polynomials, Chebyshev polynomials, and some conjectures of Jeffery // J. Integer Seq. 2014. Vol. 17. Article 14.3.8.
4. *Charpin P.* Hyperbent functions, Kloosterman sums and Dickson polynomials / P. Charpin, G. Gong // IEEE Trans. Inform. Theory. 2008. Vol. 54(9). P. 4230-4238.
5. *Cipu M.* Dickson polynomial permutations and Gröbner bases / M. Cipu, S.D. Cohen // Contemp. Math. 2008. Vol. 461. P. 79-90.
6. *Fitzgerald R.W.*Generalized reciprocals, factors of Dicksonpolynomials and generalized cyclotomic polynomials over finite fields / R.W. Fitzgerald, J.L. Yucas // Finite Fields Appl. 2007. Vol. 13. P. 492-515.
7. *Hong S.* Necessary conditions for reversed Dickson polynomials of the second kind to be permutational / S. Hong, X. Qin, W. Zhao // Finite Fields Appl. 2016. Vol. 37. P. 54-71.
8. *Mesnager S.* Bent and Hyper-bent functions in polynomial form and their link with some exponential sums and Dickson polynomials // IEEE Trans. Inform. Theory. 2011. Vol. 57(9). P. 5996-6009.
9. *Wang Q.* Dickson polynomials over finite fields / Q. Wang, J.L. Yucas // Finite Fields Appl.2012. Vol. 18. P. 814-831.
10. *Bassalygo L.A.* On polynomials of special form over a finite field of odd characteristic attaining the Weil bound / L. A. Bassalygo,V. A. Zinov’ev // Math. Notes. 2005. Vol. 78(1). P. 14-22.
11. *Cahill N.D.* Fibonacci determinants / N.D. Cahill, J.R. D’Errico, D.A. Narayan, J.Y. Narayan // College Math. J. 2002. Vol. 33. 221-225.

12. *Merca M.* A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix // Spec. Matrices. 2013. Vol. 1. P. 10-16.
13. *Goy T.* On new Catalan identities using Toeplitz-Hessenberg matrices // 11th Inter. Algebraic Conf. in Ukraine, dedicated to the 75th anniv. of V.V. Kirichenko: Book of abstracts. Kyiv: Institute of Mathematics, 2017. P. 49.
14. *Goy T.* On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas identities with multinomial coefficients // Тез.докл. Междунар. конф. «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики», посвящ. 100-летию со дня рождения акад. Тайманова А.Д. Алматы: ИМММ, 2017. С. 61-64.
15. *Goy T.* On Pell identities with multinomial coefficients // Материалы Междунар. конф. «Числа, формы и геометрия». Хабаровск: Ин-т приклад. математики, Хабаровское отд., 2017. С. 23-24.
16. *Goy T.* Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence // Материалы XII Междунар. конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». Махачкала: ДГУ, 2017. С.107-109.
17. *Goy T.* Some tribonacci identities using Toeplitz-Hessenberg determinants // 18th Inter. Scientific M. Kravchuk Conf.: Book of abstracts. Kyiv: NTUU «KPI», 2017. Vol. 1. P. 159-161.
18. *Гой Т.П.* Определители матриц Теплица-Хессенберга и числа Люка // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. Вып. 11. С. 32-36.
19. *Гой Т.П.* Про нові формули для чисел Фібоначчі // Матеріали VIII Всеукр. наук.-техн. конф. «Інформатика та системні науки (ІСН–2017)». Полтава: ПУЕТ, 2017. С. 51-54.

УДК 532.5

В. А. Коромыслов

Ярославский филиал ПГУПС,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, *e-mail: s_myslov@mail.ru*

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ “MATHEMATICA” ПРИ РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Показано, как используя систему “Mathematica” можно получить численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений. Метод использовался при расчете осцилляций заряженной капли движущейся в диэлектрической среде.

Ключевые слова: *капля, заряд, неустойчивость, среда, система нелинейных дифференциальных уравнений*