4. *Коробов Н. М.* Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 60. С. 195—210.

5. *Чубариков В. Н.* Простые числа, дзета-функция Римана и тригонометрические суммы // Математический институт им. В.А.Стеклова РАН. 2011. 64 с.

6. *Hua Loo Keng, Wang Yuan.* Application of number theory to numerical analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 241 p.

7. *Коробов Н. М., Добровольский Н. М.* Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т.8, вып. 4. С.105–128.

8. *Добровольский Н. М., Коробов Н. М.* Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002, Т.3, вып. 1. С. 41–48.

9. *Krause J. M.* Fouriersche Reihen mit zwei veranderlichen Grossen // Ber. Verh. Sachs. Acad. Wiss. Leipzig. Math. Naturw. Kl. 1903. Vol. 55. P.164–197.

10. *Hardy G. H.* On double Fourier series and especially those which represent the double zeta function with real and incommensurable parameters // Quart. Journ. Math. 1906. Vol. 37. P.53–79.

11. *Koksma I. F.* Een algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige Verdeeling modulo 1 // Math. B (Zutphen). 1942–1943. Vol. 11. P. 7–11.

12. *Hlawka E.* Funktionen von beschrankten Variation in der Theorie Gleichverteilung // Ann. Math. Pure Appl. 1961. Vol. 54. P. 325–333.

13. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.

14. *Глазунов Н. М.* Разработка методов обоснования гипотез формальных теорий. Saarbrucken: LAP. 2014. 280 с.

15. *Glazunov N. M.* On A.V. Malyshev's approach to Minkowski's conjecture concerning the critical determinant of the region $|x|^p + |y|^p < 1$ for $p > 1$ // Чебышевский сборник. 2016. Т.17, вып. 4. С.185–193.

16. *Glazunov N. M.* Extremal forms and rigidity in arithmetic geometry and in dynamics // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, вып. 3. С.124–146.

Национальный авиационный университет (Киев).

УДК 517.176

О новых фибиномиальных тождествах

Т. П. Гой (Украина, г. Ивано–Франковск)
tarasgoy@gmail.com

On new fibinomial identities

T. P. Goy (Ukraine, Ivano–Frankivsk)
tarasgoy@gmail.com

Фибиномиальное тождество — это тождество, сочетающее числа Фибоначчи с биномиальными (мультиномиальными) коэффициентами. Примеры таких тождеств можно найти в [1], [3], [8].

Для получения новых семейств фибиномиальных тождеств мы будем использовать определители матрицы Теплица–Хессенберга

$$A_n(a_0; a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного индекса k.

Определитель матрицы A_n можно выразить через ее элементы по формуле

$$\det(A_n) = \sum_{\widetilde{s}=n} (-a_0)^{n-|s|} p_n(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{1}$$

где $p_n(s) = \frac{(s_1+s_2+\cdots+s_n)!}{s_1!s_2!\cdots s_n!} = \binom{s_1}{s_1}\binom{s_1+s_2}{s_2}\cdots\binom{s_1+s_2+\cdots+s_n}{s_n}$ — мультиномиальный коэффициент, $\widetilde{s} = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$, причем $s_i \geq 0$,

Рассмотрим некоторые последовательности определителей Теплица–Хессенберга специального вида (с числами ± 2 над основной диагональю), элементами которых являются числа Фибоначчи, определенные рекуррентно:

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Утверждение 4. *Для всех $n \geq 1$ имеют место тождества:*

$$\begin{aligned}
\det(2; F_0, F_1, \dots, F_{n-1}) &= \frac{(-1-\sqrt{3})^{n-1} - (-1+\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{3}}, \\
\det(-2; F_0, F_1, \dots, F_{n-1}) &= \frac{(1+\sqrt{7})^{n-1} - (1-\sqrt{7})^{n-1}}{\sqrt{7}}, \\
\det(2; F_1, F_2, \dots, F_n) &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^n - \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^n\right), \\
\det(-2; F_1, F_2, \dots, F_n) &= \frac{4^n - (-1)^n}{5}, \\
\det(2; F_2, F_3, \dots, F_{n+1}) &= \frac{(-2)^{n+1} - 1}{3}, \\
\det(2; F_3, F_4, \dots, F_{n+2}) &= (-1)^n \cdot 2^{\frac{2n+1-(-1)^n}{4}}, \\
\det(2; F_4, F_5, \dots, F_{n+3}) &= 4\delta_{n1} - 1, \\
\det(2; F_5, F_6, \dots, F_{n+4}) &= 2^{n+1} + 1,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\det(-2; F_1, F_3, \ldots, F_{2n-1}) &= \frac{4\cdot 6^{n-1}+1}{5},\\
\det(2; F_3, F_5, \ldots, F_{2n+1}) &= \frac{(-2-\sqrt{2})^n+(-2+\sqrt{2})^n}{-2},\\
\det(2; F_5, F_7, \ldots, F_{2n+3}) &= 4\delta_{n1}-(-1)^n,\\
\det(2; F_0, F_2, \ldots, F_{2n-2}) &= \frac{(-3-\sqrt{3})^{n-1}-(-3+\sqrt{3})^{n-1}}{\sqrt{3}},\\
\det(-2; F_0, F_2, \ldots, F_{2n-2}) &= \frac{(3+\sqrt{7})^{n-1}-(3-\sqrt{7})^{n-1}}{\sqrt{7}},\\
\det(2; F_2, F_4, \ldots, F_{2n}) &= \frac{(-1)^n-(-4)^n}{3},\\
\det(2; F_4, F_6, \ldots, F_{2n+2}) &= (-1)^n(1-2^{n+1}),
\end{aligned}
$$

где δ_{n1} — символ Кронекера.

Используя формулу (1) для определителей Теплица–Хессенберга из Утверждения 1, после несложных преобразований получаем следующие тождества с мультиномиальными коэффициентами для чисел Фибоначчи с последовательными, парными и непарными индексами.

Утверждение 5. *Для всех $n \geq 1$ имеют место тождества:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{n-1}}{2}\right)^{s_n} &= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right),\\
\sum_{\widetilde{s}=n}p_n(s)\left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{n-1}}{2}\right)^{s_n} &= \frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}\right),\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_n}{2}\right)^{s_n} &= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^{n}-\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^{n}\right),\\
\sum_{\widetilde{s}=n}p_n(s)\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_n}{2}\right)^{s_n} &= \frac{4^n-(-1)^n}{5\cdot 2^n},\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{n+1}}{2}\right)^{s_n} &= \frac{-2^{n+1}-(-1)^n}{3\cdot 2^n},\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{n+2}}{2}\right)^{s_n} &= -2^{\frac{1-2n-(-1)^n}{4}},\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{n+3}}{2}\right)^{s_n} &= \frac{4\delta_{n1}-1}{(-2)^n},\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_6}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{n+4}}{2}\right)^{s_n} &= (-1)^n\cdot\left(2+2^{-n}\right),\\
\sum_{\widetilde{s}=n}p_n(s)\left(\frac{F_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n-1}}{2}\right)^{s_n} &= \frac{2\cdot 6^n+3}{15\cdot 2^n},\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_3}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n+1}}{2}\right)^{s_n} &= -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\right),\\
\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_5}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_7}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n+3}}{2}\right)^{s_n} &= \frac{(-1)^n 4\delta_{n1}-1}{2^n},
\end{aligned}
$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n-2}}{2}\right)^{s_n}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}p_n(s)\left(\frac{F_0}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n-2}}{2}\right)^{s_n}=\frac{1}{2\sqrt{7}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^{n-1}\right),$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_2}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n}}{2}\right)^{s_n}=\frac{1-4^n}{3\cdot 2^n},$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n}(-1)^{|s|}p_n(s)\left(\frac{F_4}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{F_6}{2}\right)^{s_2}\cdots\left(\frac{F_{2n+2}}{2}\right)^{s_n}=2^{-n}-2,$$

где суммирование производится по всем целым числам $s_j \geq 0$, для которых $\widetilde{s}=n$.

Формулы, аналогичные формулам из Утверждения 2, для чисел Люка, Пелля, Якобсталя, Якобсталя–Люка, Падована и трибоначчи получены нами в [2, 4, 5, 6, 7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гой Т. П. Определители матриц Теплица–Хессенберга и числа Люка // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. трудов. 2016. Вып. 11. С. 32-36.

2. Гой Т. П. Про нові формули для чисел Фібоначчі // VIII Всеукраинская научно-техническая конференция “Информатика и системные науки”: материалы конференции. Всеукраинская конференция (Полтава, 16–18 марта 2017 г.) — Полтава, 2017. С. 51-54.

3. Benjamin A. T., Quinn J. J., Rouse J. A. Fibinomial identities // Applications of Fibonacci numbers. 2004. Vol 10. P. 19-24.

4. Goy T. On Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas identities with multinomial coefficients // Международная конференция “Актуальные проблемы чистой и прикладной математики”: тезисы докладов. Международная конференция (Алматы, Казастан, 22-25 августа 2017 г.) — Алматы, 2017. С. 61-64.

5. Goy T. On Pell identities with multinomial coefficients // International Conference “Numbers, Forms and Geometry”: Proceedings. International Conference (Sochi, 21-26 August, 2017) — Khabarovsk, 2017. P. 23-24.

6. Goy T. Some identities for Padovan numbers via the determinants of Toeplitz–Hessenberg matrices // 30th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society “Pure and Applied Mathematics”: Book of abstracts. International Conference (Bab-Ezzouar, Algeria, 12-15 July, 2017) — Bab-Ezzouar, 2017. P. 242-244.

7. Goy T. Some tribonacci identities using Toeplitz–Hessenberg determinants // 18th International Scientific M. Kravchuk Conference: Proceedings. International Conference (Kyiv-Lutsk, October 7-10, 2017) — Kyiv, 2017. Vol. 1. P. 159-161.

8. Koshy T. Fibonacci and Lucas Numbers and Applications. — New York: John Wiley & Sons, 2002.

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаныка, Украина
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine

УДК 517