Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

ЧИСЛА МОЦКИНА И НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА, СВЯЗАННЫЕ С НИМИ

Т. П. Гой (Ивано-Франковск, Украина)[1]

1. Введение

Число Моцкина M_n для данного натурального числа n — это количество возможных вариантов соединения n различных точек на окружности непересекающимися хордами (хорды могут выходить не из каждой точки).

Числа Моцкина имеют и другие комбинаторные интерпретации. Например, число M_n является количеством положительных целых последовательностей длины $n-1$, в которых начальный и конечный элемент равны 1 или 2, а разность между любыми двумя последовательными элементами равна -1, 0 или 1. Число M_n также можно интерпретировать как число путей-маршрутов длины n, которые выходят из начальной точки с координатами $(0,0)$ и заканчиваются в точке $(n,0)$, не опускаясь ниже нулевого уровня.

В [7] указано четырнадцать различных применений чисел Моцкина в комбинаторике, теории чисел и геометрии (см. также, например, [3, 4, 5, 6, 15, 16, 18]).

Числа Моцкина $\{M_n\}_{n\geqslant 0}$ образуют последовательность A001006 из Он-лайн энциклопедии целочисленных последовательностей [19]:

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 9,\ 21,\ 51,\ 127,\ 323,\ 835,\ 2188,\ 5798,\ 15511,\ 41835,\ 113634,\ 310572,\ldots$$

Числа Моцкина удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_i M_{n-2-i}, \quad M_n = \frac{2n+1}{n+2}M_{n-1} + \frac{3n-3}{n+2}M_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

где $M_0 = M_1 = 1$, и могут быть выражены по формуле

$$M_n = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} C_i, \qquad n \geqslant 0,$$

где $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$ — биномиальный коэффициент, $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ — число Каталана (последовательность A000108 в [19]), $\lfloor s\rfloor$ — наибольшее целое, меньшее или равное s.

2. Матрица и определитель Теплица–Хессенберга

Нижней *матрицей Теплица–Хессенберга* n-го порядка называется матрица вида

$$A_n \equiv A_n(a_0; a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного индекса k.

 Получено 25.12.2017. УДК 511.176.

[1]Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника. E-mail: tarasgoy@yahoo.com.

Определитель $\det(A_n)$ матрицы A_n из (1) (*определитель Теплица–Хессенберга*) можно выразить через его элементы по *формуле Труди* [17]

$$\det(A_n) = \sum_{\widetilde{s}=n} (-a_0)^{n-|s|} \binom{|s|}{s_1, \dots, s_n} a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{2}$$

где $\binom{|s|}{s_1,\dots,s_n} = \frac{(s_1+s_2+\cdots+s_n)!}{s_1!s_2!\cdots s_n!}$ — мультиномиальный коэффициент, $\widetilde{s} = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, $|s| = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ и, кроме того, $s_i \geqslant 0$.

3. Определители Теплица–Хессенберга, элементами которых являются числа Моцкина

Рассмотрим некоторые последовательности определителей Теплица–Хессенберга специального вида, элементами которых являются числа M_n.

Для удобства далее будем обозначать

$$D_{\pm}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det(A_n(\pm 1; a_1, a_2, \dots, a_n)).$$

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 1$, кроме указанных случаев. Тогда*

$$\begin{aligned}
D_+(M_0, M_1, \dots, M_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-1}{i-1} C_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{n-1}{i-1} \binom{2i-2}{i-1}, \\
D_-(M_0, M_1, \dots, M_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \binom{n-1}{i-1} \binom{2i-1}{i}, \\
D_+(M_1, M_2, \dots, M_n) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n-2}{n-i} C_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{n-2}{n-i} \binom{2i-2}{i-1}, \\
D_+(M_1, M_2, \dots, M_n) &= (-1)^{n-1} M_{n-2}, \qquad n \geqslant 2, \\
D_+(M_2, M_3, \dots, M_{n+1}) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{i-1} \binom{n-i-1}{i-2}, \qquad n \geqslant 2.
\end{aligned}$$

Используя формулу (2) для определителей Теплица–Хессенберга из теоремы 1, после несложных преобразований получаем следующие тождества с мультиномиальными коэффициентами для чисел Моцкина M_i.

Теорема 2. *Пусть $n \geqslant 1$, кроме указанного случая. Тогда*

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|+1} \binom{|s|}{s_1, \dots s_n} M_0^{s_1} M_1^{s_2} \cdots M_{n-1}^{s_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{n+i}}{i} \binom{n-1}{i-1} \binom{2i-2}{i-1}, \tag{3}$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} \binom{|s|}{s_1, \dots s_n} M_0^{s_1} M_1^{s_2} \cdots M_{n-1}^{s_n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i-1} \binom{n-1}{i-1} \binom{2i-1}{i}, \tag{4}$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|+1} \binom{|s|}{s_1, \dots s_n} M_1^{s_1} M_2^{s_2} \cdots M_n^{s_n} = M_{n-2}, \tag{5}$$

$$\sum_{\widetilde{s}=n} (-1)^{|s|+1} \binom{|s|}{s_1, \dots s_n} M_2^{s_1} M_3^{s_2} \cdots M_{n+1}^{s_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \binom{n}{i-1} \binom{n-i-1}{i-2}, \qquad n \geq 2, \tag{6}$$

где суммирование производится по всем целым числам $s_j \geqslant 0$, для которых $\widetilde{s} = n$.

Следствие. *Из формул* (3), (4), (5) *и* (6) *при* $n = 3, 4, 5, 6$ *соответственно получаем:*

$$M_0^3 - 2M_0M_1 + M_2 = 1,$$
$$M_0^4 + 3M_0^2M_1 + 2M_0M_2 + M_1^2 + M_3 = 13,$$
$$M_1^5 - 4M_1^3M_2 + 3M_1^2M_3 + 3M_1M_2^2 - 2M_1M_4 - 2M_2M_3 + M_5 = M_3 = 4,$$
$$M_2^6 - 5M_2^4M_3 + 4M_2^3M_4 + 6M_2^2M_3^2 - 3M_2^2M_5 - 6M_2M_3M_4 + 2M_3M_5$$
$$+ 2M_2M_6 - M_3^3 + M_4^2 - M_7 = 6.$$

Замечание. Формулы, аналогичные формулам из теоремы 2, для чисел Фибоначчи, Люка, Пелля, Якобсталя, Якобсталя–Люка, Каталана, Падована, трибоначчи получены нами в [1, 2, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Литература

1. *Гой Т. П.* Определители матриц Теплица-Хессенберга и числа Люка // Математика и естественные науки. Теория и практика : Межвуз. сб. науч. трудов. Ярославль : Издат. дом ЯГТУ, 2016. Вып. 11. С. 32—36.
2. *Гой Т. П.* Про нові формули для чисел Фібоначчі // Информатика и системные науки (ІСН–2017) : Материалы VIII Всеукраинской научно-технической конференции, Полтава, 16–18 марта 2017 г. Полтава : ПУЭТ, 2017. С. 51—54.
3. *Aigner M.* Motzkin numbers // Europ. J. Combin. 1998. Vol. 19. P. 663—675.
4. *Artioli M., Dattoli G., Licciardi S., Pagnutti S.* Motzkin numbers: an operational point of view // arXiv: 1703.07262. URL: https://arxiv.org/pdf/1703.07262 (дата обращения: 24.12.2017).
5. *Barcucci E., Del Lungo A., Pergola E., Pinzani R.* From Motzkin to Catalan permutations // Discr. Math. 2000. Vol. 217. P. 33—49.
6. *Baril J.–L.* Classical sequences revisited with permutations avoiding dotted pattern // Electron. J. Combin. 2011. Vol. 18. Article #P178.
7. *Donaghey R., Shapiro L.W.* Motzkin numbers // J. Combin. Theory Ser. A. 1977. Vol. 23. № 3. P. 291—301.
8. *Goy T.* New Fibonacci and Lucas identities using Toeplitz–Hessenberg permanents // Mathematical, Physical Sciences and Engineering Applications: Abstracts of the 6th Abu Dhabi University Annual International Conference, Abu Dhabi, December 19–21, 2017. Abu Dhabi University, 2017. URL: http://at.yorku.ca/cgi-bin/abstract/cbow-15 (дата обращения: 24.12.2017).
9. *Goy T.* On new Catalan identities using Toeplitz–Hessenberg matrices // 11th International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko : Book of absrtacts, Kyiv, July 3–7, 2017. Kyiv : Institute of Mathematics, 2017. P. 49.
10. *Goy T.* On Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas identities with multinomial coefficients // Актуальные проблемы чистой и прикладной математики : Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения академика Тайманова А. Д., Алматы, 22–25 августа 2017 г. Алматы : Институт математики и математического моделирования, 2017. С. 61—64.
11. *Goy T.* On Pell identities with multinomial coefficients // Numbers, Forms and Geometry : Proceedings of the International Conference, Sochi, 21–26 August, 2017. Khabarovsk : Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, 2017. P. 23—24.
12. *Goy T.* Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики : Материалы XII Международной конференции, Махачкала, 19–22 сентября 2017 г. Махачкала : ДГУ, 2017. С. 107—109.
13. *Goy T.* Some identities for Padovan numbers via the determinants of Toeplitz–Hessenberg matrices // Pure and Applied Mathematics (ICJMS-2017): Book of abstracts of the 30th International Conference of the Jangjeon Mathematical Society, Bab-Ezzouar, Algeria, 12–15 July, 2017. Bab-Ezzouar : Faculty of Mathematics, USTHB, 2017. P. 242—244.
14. *Goy T.* Some tribonacci identities using Toeplitz–Hessenberg determinants // 18th International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference: Conference Proceedings, Kyiv–Lutsk, October 7–10, 2017. Kyiv : NTUU “KPI”, 2017. Vol. 1. P. 159—161.
15. *Lengyel T.* On divisibility properties of some differences of Motzkin numbers // Ann. Math. Inform. 2013. Vol. 41. P. 121—136.
16. *Mansour T., Schork M., Sun Y.* Motzkin numbers of higher rank: generating function and explicit expression // J. Integer Seq. 2007. Vol. 10. Article 07.7.4.
17. *Merca M.* A note on the determinant of a Toeplitz–Hessenberg matrix // Spec. Matrices. 2013. Vol. 1. P. 10—16.
18. *Oste R., Van der Jeugt J.* Motzkin paths, Motzkin polynomials and recurrence relations // Electron. J. Combin. 2015. Vol. 22. Article #P2.8.
19. *Sloane N.J.A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. URL: https://oeis.org.