5. Basalov Yu. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation, Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1804.05385
6. Cassels J. W. S., Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 119-121.
7. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory (1980) p. 543-556.
8. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 30 (1955). p. 186-195.

УДК 519.115.1

On a class of permutations of a multiset

T. Goy, R. Zatorsky (Ukraine, Ivano-Frankivsk)

Об одном классе перестановок мультимножества

Т. Гой, Р. Заторский (Украина, г. Ивано-Франковск)

In combinatorial mathematics, a Stirling permutation of order m is a permutation of the multiset $\{1, 1, 2, 2, \ldots, m, m\}$ such that for each i, $1 \leq i \leq m$, the elements between the two occurrences of i are larger than i (the name comes from relations with the Stirling numbers, see [2]). E.g., 1122, 1221 and 2211 are Stirling permutations, whereas the permutations 1212 and 2112 of $\{1, 1, 2, 2\}$ aren't.

A natural generalization of Stirling permutations is to consider permutations of the multiset $\{1^n, 2^n, \ldots, m^n\}$. We call a permutation of the multiset $\{1^n, 2^n, \ldots, m^n\}$ a n-Stirling permutation if for each i, $1 \leq i \leq m$, the elements between two consecutive occurrences of i are larger than i. Let $E_m(n)$ denote the number of n-Stirling permutation. It is well known that $E_m(2) = (2m-1)!!$, $E_m(n) = \prod_{i=1}^{m} (n(i-1)+1)$. See [1, 2, 3, 4] for more details.

We have obtained the next results:

Theorem 1. *The following formula hold*

$$E_{m+1}(n) = \sum_{\substack{0\lambda_0+1\lambda_1+\cdots+m\lambda_m=m \\ \lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_m=n+1}} \frac{(n+1)! \cdot C(m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)}{\lambda_0!\lambda_1!\cdots\lambda_m!} \prod_{j=0}^{m} E_j(n)^{\lambda_j},$$

where $E_0(n) := 1$,

$$C(m, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{i_j=0}^{\lambda_j-1} \binom{m-(0\lambda_0+1\lambda_1+\cdots+(j-1)\lambda_{j-1})-j\cdot i_j}{j} = \frac{m!}{0!^{\lambda_0}1!^{\lambda_1}\cdots m!^{\lambda_m}}.$$

Theorem 2. *The following recurrence hold*

$$E_{m+1}(n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\binom{m-1}{i-1} n + \binom{m-1}{i-1} - \binom{m-1}{i-2} \right) E_{m+1-i}(n) E_i(n),$$

where $E_1(n) = 1$.

REFERENCES

1. Dzhumadil'daev A., Yeliussizov D. Stirling permutations on multisets // European Journal of Combinatorics. 2014. Vol. 36. P. 377–392.
2. Gessel I., Stanley R. P. Stirling polynomials // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1978. Vol. 24(1). P. 24-33.
3. Kuba M., Panholzer A. Analysis of statistics for generalized Stirling permutations // Combinatorics, Probability and Computing. 2011. Vol. 20(6). P. 875-910.
4. Park S. K. The r-multipermutations // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 1994. Vol. 67(1). P. 44-71.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine
Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаныка, Украина

—————————————————————————————————————

Исправление формулы Палмера
для числа помеченных Эйлеровых графов

В. А. Воблый (Москва)

Пусть $U(p,q)$ – число помеченных эйлеровых графов с p вершинами и q ребрами. Палмер по аналогии с помеченными связными графами без доказательства дает формулу [1, p. 394]:

$$U(p,q) = \binom{\binom{p}{2}}{q} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1} k\binom{p}{k}\sum_{m=0}^{q}\binom{\binom{p-k}{2}}{m}U(k,q-m) .$$

По формуле Палмера имеем $U(4,4) = 15$, хотя должно быть $U(4,4) = 3$. Отметим, что эта же неверная формула приводится в обзоре [2].

Пусть $W(p,q)$ – число помеченных четных графов с p вершинами и q ребрами, а $P_q(x,n)$ – многочлен Кравчука. Этот многочлен может быть определен с помощью производящей функции [3].

$$(1-z)^x(1+z)^{n-x} = \sum_{q=0}^{n} P_q(x,n)z^q .$$

Из производящей функции, полученной Ридом [4], в [5] найдена формула

$$W(p,q) = \frac{1}{2^p}\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}P_q(i(p-i),p(p-1)/2) .$$

Теорема. Число $U(p,q)$ помеченных эйлеровых графов с n вершинами и q ребрами при $q \geqslant p \geqslant 3$ равно

$$U(p,q) = W(p,q) - \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p-1}{k-1}\sum_{j=0}^{q}U(k,j)W(p-k,q-j) .$$

Доказательство. [Доказательство] Положим $W(0,0) = 1, U(0,0) = 0, W(0,q) = U(0,q) = 0$ при $q > 0$ и введем производящие функции

$$w(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}W(p,q)\frac{x^py^q}{p!}, u(x,y) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}U(p,q)\frac{x^py^q}{p!} ,$$