Про коректну розв'язність періодичної крайової задачі для рівняння руху балки з нежорстким закріпленням кінців

Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

tarasgoy@yahoo.com

Негрич М.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

negrychmariya@gmail.com

Савка І.Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

s-i@ukr.net

Нехай $D=(0,T)\times(0,L)$, $T>0$, $L>0$, $\mathbf{H}_q=\mathbf{H}_q[0,L]$, $q\in\mathbb{R}$, — простір усіх тригонометричних рядів $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\varphi_k\sin\frac{k\pi x}{L}$ зі скінченною нормою $\|\varphi\|_{\mathbf{H}_q}=\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}(1+k)^{2q}|\varphi_k|^2\right)^{\frac12}$; $\mathbf{C}^n([0,T];\mathbf{H}_q)$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — простір усіх рядів вигляду $u(t,x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}u_k(t)\sin\frac{k\pi x}{L}$, де $u_k\in\mathbf{C}^n[0,T]$, $k\in\mathbb{N}$, для яких

$$\|u\|^2_{\mathbf{C}^n([0,T];\mathbf{H}_q)}=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k^{(j)}(t)\sin\tfrac{k\pi x}{L}\Big\|^2_{\mathbf{H}_q}<\infty.$$

В області D розглядаємо задачу

$$u_{tt}(t,x)+\alpha^2u_{xxxx}(t,x)+\beta u_{xx}(t,x)+\delta u(t,x)=0,\quad (t,x)\in D, \tag{1}$$

$$u(t,0)=u(t,L)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,L)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{2}$$

$$u(0,x)-u(T,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)-u_t(T,x)=\psi(x),\quad 0\le x\le L, \tag{3}$$

де $\alpha,\beta,\delta\in\mathbb{R}$, причому $\beta^2<4\alpha^2\delta$ (ця умова забезпечує гіперболічність за Петровським рівняння (1)), φ і ψ — задані функції зі шкали просторів $\{\mathbf{H}_q\}_{q\in\mathbb{R}}$. Розв'язок $u=u(t,x)$ задачі (1)–(3) шукаємо у просторі $\mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}_q)$.

Коректна розв'язність задачі (1)–(3) залежить від діофантових властивостей послідовності $\{1-\cos\beta_kT\}_{k\in\mathbb{N}}$, де $\beta_k=\sqrt{\alpha^2\lambda_k^4-\beta\lambda_k^2+\delta}$, $\lambda_k=\pi k/L$.

Якщо ця послідовність не містить нульових членів, тобто для довільних $(k, m) \in \mathbb{N}^2$

$$\beta_k T \neq 2\pi m,$$

то задача (1)–(3) має єдиний формальний розв'язок, який зображується формулою

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k\Big(\cos\beta_k t-\cos\beta_k(t-T)\Big)\varphi_k+\Big(\sin\beta_k t+\sin\beta_k(t+T)\Big)\psi_k}{2\beta_k(1-\cos\beta_k T)}\sin\tfrac{k\pi x}{L}, \qquad (4)$$

де φ_k і ψ_k — коефіцієнти Фур'є функцій φ і ψ відповідно, які визначаються формулами

$$\varphi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\tfrac{k\pi x}{L}\,dx, \quad \psi_k = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin\tfrac{k\pi x}{L}\,dx.$$

Існування розв'язку $u \in \mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}_q)$ задачі (1)–(3) пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки члени послідовності $\{1-\cos\beta_k T\}_{k\in\mathbb{N}}$ у знаменнику формули (4), будучи відмінними від нуля, можуть як завгодно близько наближатися до нуля при $k \to +\infty$. Це спричиняє розбіжність ряду (4) у просторі $\mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}_q)$, тобто нерозв'язність задачі у вказаній шкалі. Якщо вдається оцінити знизу малі знаменинники $1-\cos\beta_k T$ певним виразом зі степеновою поведінкою стосовно k, то за відповідних обмежень на функції φ і ψ можна отримати коректну розв'язність задачі.

За допомогою метричного підходу [2] отримано такі твердження.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність*

$$|1-\cos\beta_k T| \geq T^2 k^{-\gamma}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{N}$ при $\gamma > 2$.

Теорема 2. *Якщо $\varphi \in \mathbf{H}_{q+\gamma+4}$ і $\psi \in \mathbf{H}_{q+\gamma+2}$, де $\gamma > 2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T існує єдиний розв'язок $u \in \mathbf{C}^2([0,T];\mathbf{H}_q)$ задачі (1)–(3), який неперервно залежить від функцій φ і ψ.*

Крайові задачі з нелокальними, зокрема, з періодичними умовами за часовою або просторовою координатою для рівняння (1) досліджувались у [1, 3].

Література

[1] Azizbayov E., Mehraliyev Y., *A time-nonlocal boundary value problem for equation of homogeneous bar motion*, Вісник Київського нац. ун-ту ім. Т. Шевченка, Сер. Математика, механіка, **17** (2012), 20–23.

[2] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М., *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними*, К.: Наук. думка (2002), 416 с.

[3] Сабитов К. Б., *Колебания балки с заделанными концами*, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, **19**(2) (2015), 311–324.

Про декомпозицію неперервності, що пов'язана із замкненим графіком

Нестеренко В.В.
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
v.nesterenko@chnu.edu.ua

Під декомпозицією неперервності розуміють теореми, в яких неперервність одержується при одночасному виконанні кількох слабших умов. Серед розмаїття таких результатів особливу увагу заслуговують теореми, де однією з умов є замкненість графіка.

У 1970 році П. Лонґ і Е. Макґегі в [1] встановили, що кожне майже неперервне відображення $f : X \to Y$ між топологічним простором X і гаусдорфовим локально компактним просторов Y із замкненим графіком є неперервним. Цей результат узагальнювали для різних топологічних просторів багато математиків (див. [2]-[4]).

Іншу декомпозиційну теорему встановив Й. Добош в [5]: кожна двосторонньо квазінеперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ із замкненим графіком є неперервною. Результат Й. Добоша Я.Борсік в [6] переніс на випадок загальних топологічних просторів увівши поняття B-квазінеперервності, яке є узагальненням двосторонньої квазінеперервності дійсних функцій.

Теорема 1 (Я.Борсік, [6]). *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і Y – локально компактний гаусдорфовий топологічний простір. Відображення $f : X \to Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно B-квазінеперервне і має замкнений графік.*

Слід зауважити, що поняття майже неперервності та двосторонньої квазінеперервності (B-квазінеперервності) не порівняльні між собою.

В цьому повідомленні подано результати, які для деяких типів просторів охоплюють згадані вище теореми про декомпозицію неперервності за участю майже неперервності чи двосторонньої квазінеперервності.

Нехай X та Y – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$:

- називається *майже неперервним в точці* $x \in X$, якщо для кожного околу V точки $y = f(x)$ в Y існує множина A в X, така, що $x \in int\overline{A}$ і $f(A) \subseteq V$;