Про інтеграли від функцій, побудованих при допомозі зростаючих факторіальних степенів

Гой Тарас Петрович,
к. ф.-м. н., доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ)

Шевчук Оксана Вікторівна,
студентка факультету математики та інформатики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (м. Івано-Франківськ)

Вступ. За аналогією з відомими степеневими рядами

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

які можна розглядати як розвинення за спадними факторіальними степенями ($m! = m^{\underline{m}}$), у [2, 3] означені нові неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів:

$$\mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\overline{2n}}}, \quad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}.$$

У [2, 3], зокрема, встановлені деякі властивості функцій $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, виведені формули для їхнього аналітичного представлення, побудовані графіки та доведені формули, які пов'язують ці функції. Також показано, що кожна з цих функцій є розв'язком задач Коші для звичайних лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку.

У [5] введені інтегральні функції, утворені заміною у класичних інтегралах Френеля $\int_0^x \cos t^2 dt$ і $\int_0^x \sin t^2 dt$ підінтегральних функцій на функції $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ відповідно. Встановлені формули, що пов'язують нові функції з інтегралами Френеля. Виведені диференціальні рівняння, розв'язками яких є введені функції.

У цій статті досліджуються дві нові неелементарні функції дійсної змінної – інтеграли зі змінною верхньою межею від функцій $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$.

Основні означення й поняття.

Означення 1. [6] Для довільних $x \in \mathbf{R}$ і $m \in \mathbf{N}$ *факторіальним степенем* m з кроком $k \in \mathbf{R}$ називають вираз

$$x^{m\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(m-1)k), & \text{якщо } m \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } m = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то маємо звичайний степінь, тобто $x^{m\{0\}} = x^m$.

Зростаючий факторіальний степінь m з кроком 1 і спадний факторіальний степінь m з кроком (– 1) позначатимемо через $x^{\overline{m}}$ і $x^{\underline{m}}$ відповідно, тобто

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$

$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

У комбінаториці зростаючим і спадним факторіальним степеням часто притаманна двоїстість: якщо комбінаторна задача приводить до тотожності, побудованої при допомозі спадних факторіальних степенів, то зазвичай існує змістовна комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої комбінаторної тотожності з участю зростаючих факторіальних степенів [4, 6].

Означення 2. Позначимо через $C(x),\ S(x)$ інтеграли зі змінною верхньою межею від функцій $\mathrm{Cos}(x),\ \mathrm{Sin}(x)$ відповідно, тобто

$$C(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}\, t^2 dt, \quad S(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}\, t^2 dt. \tag{1}$$

Враховуючи, що [2]

$$\mathrm{Cos}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(4n-1)!} x^{2n}, \qquad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-2)!}{(4n-3)!} x^{2n-1},$$

з (1) одержуємо такі зображення функцій $C(x),\ S(x)$ у вигляді степеневих рядів, абсолютно збіжних на всій числовій осі:

$$C(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!}{(2n+1)(4n-1)!} x^{2n+1}, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-2)!}{2n(4n-3)!} x^{2n}. \tag{2}$$

Графіки функцій $y = C(x)$ і $y = S(x)$ наведені на рисунках 1, 2 (на рис. 1 пунктиром проведено пряму $y = -x$).

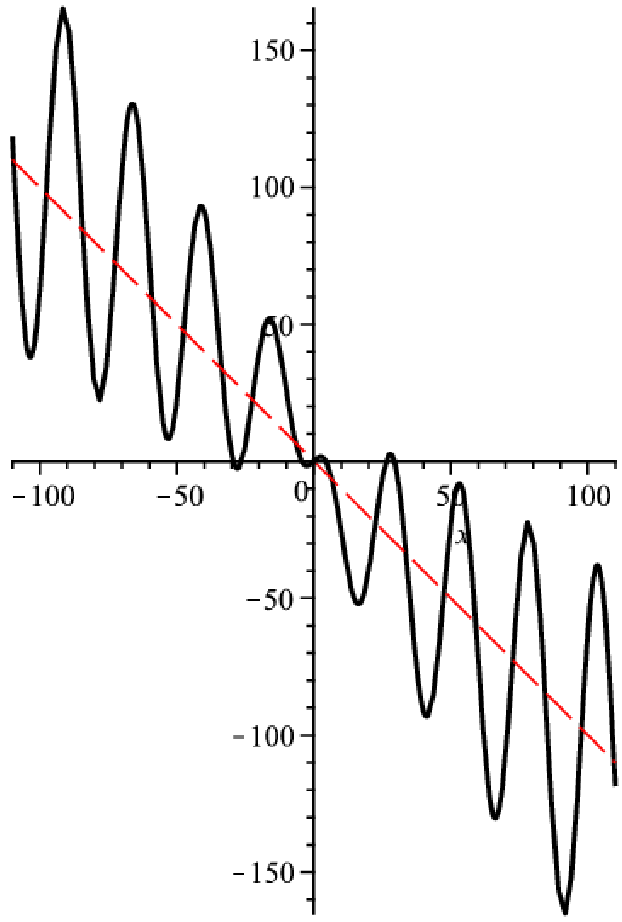

Рис. 1. Графік функції $y = C(x)$.

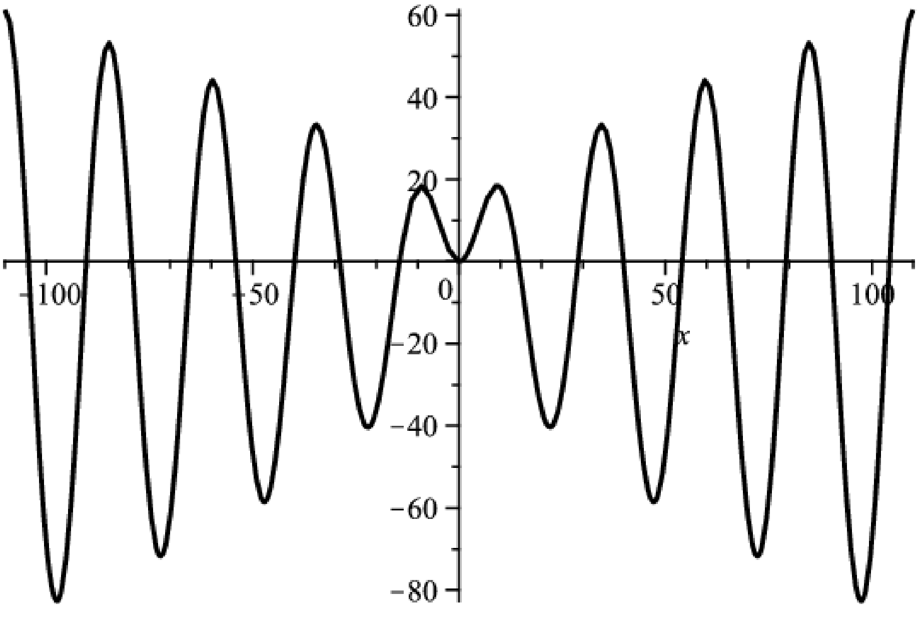

Рис. 2. Графік функції $y = S(x)$.

Зв'язок функцій $C(x)$, $S(x)$ з узагальненою гіпергеометричною функцією. Позначимо через ${}_2F_3\left(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z\right)$ узагальнену гіпергеометричну функцію, тобто функцію, визначену при допомозі узагальненого гіпергеометричного ряду [1]

$$ {}_2F_3\left(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}}\, a_2^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\, b_2^{\overline{n}}\, b_3^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!}, $$

де $a_j^{\overline{n}}$, $b_j^{\overline{n}}$ – зростаючі факторіальні степені (означення 1).

Теорема. *Для всіх* $x \in (-\infty; +\infty)$ *справджуються тотожності*

$$ C(x) = x - \frac{x^3}{18} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right), $$

$$ S(x) = \frac{x^2}{2} \cdot {}_2F_3\left(1, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right). $$

Доведення. З (2), враховуючи, що $n! = 1^{\overline{n}}$, а $(4n+1)! = 4^n (2n)!(4n+1)!!$, для функції $C(x)$ одержуємо:

$$ C(x) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(2n+3)(4n+3)!} x^{2n+3} = $$

$$ = x - \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(4n+3)!!4^n} x^{2n} = $$

$$ = x - \frac{x^3}{18} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n+1}{4}}{\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{4n+1}{4}\right) \cdot \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{4n+3}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n+3}{2}\right)} \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = $$

$$ = x - \frac{x^3}{18} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{\overline{n}} \cdot n!} \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = $$

$$ = x - \frac{x^3}{18} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right). $$

Аналогічно, для функції $S(x)$ маємо:

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n+2)(4n+1)!}x^{2n+2}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{4^n(n+1)!(4n+1)!!}x^{2n}=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)(n+1)!}\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n=$$

$$=\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}\cdot 1^{\overline{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}\cdot 2^{\overline{n}}\cdot n!}\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot{}_2F_3\left(1,1;\frac{3}{4},\frac{5}{4},2;-\frac{x^2}{64}\right).$$

Список використаної літератури:

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М. : Наука, 1973. – 294 с.
2. Гой Т. П., Заторський Р. А. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Буковинський математичний журнал. – 2013. – Т.1, № 1-2. – С. 28-33.
3. Гой Т. П., Заторський Р. А. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними степенями, та їх властивості / Матеріали Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. «Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки». – Харків : Екограф, 2013. – С. 103-106.
4. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування. – Івано-Франківськ : Сімик, 2010. – 508 с.
5. Goy T. P., Zatorsky R. A. New integral functions generated by rising factorial powers / Carpathian Mathematical Publications. – 2013. – 5 (2). – P. 217-224.
6. Jordan C. Calculus of Finite Differences. – New York : Chelsea Publishing, 1939. – 652 p.