УДК 511.176

# ЧИСЛА ПЕЛЛЯ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТЕПЛИЦА-ХЕССЕНБЕРГА

**Гой Т.П.,** к. ф.-м. н., доцент

Прикарпатский национальный университет им. Василия Стефаника,

г. Ивано-Франковск (Украина)

**Аннотация:** Доказаны формулы для вычисления определителей матриц Теплица-Хессенберга специального вида, элементами которых являются числа Пелля. Как следствие, получены новые формулы для сумм произведений чисел Пелля с полиномиальными коэффициентами.

**Ключевые слова:** определитель Теплица-Хессенберга, числа Пелля, числа Фибоначчи.

## ON PELL NUMBERS AND TOEPLITZ-HESSENBERG DETERMINANTS Goy T.P.

**Abstract:** In this article, we study three families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Pell numbers. As a consequence, we have new formulas for the sum of products of the Pell numbers with polynomial coefficients.

**Key words:** Toeplitz-Hessenberg determinant, Pell numbers, Fibonacci numbers.

**1. Введение.** *Матрицей Теплица-Хессенберга* $n$-го порядка называется матрица вида

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Определитель матрицы (1) будем называть *определителем Теплица-*

*Хессенберга*. Этот определитель можно найти, используя рекуррентную формулу

$$\det(A_n) = a_1 \det(A_{n-1}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_0^{n-j} a_{n+1-j} \det(A_{j-1}), \tag{2}$$

где $\det(A_0) \equiv 1$. Формула (2) является следствием более общей формулы из [1, теорема 4.20].

Формула Труди [2] дает возможность выразить определитель Теплица-Хессенберга через его элементы:

$$\det(A_n) = (-a_0)^n \cdot \sum_{s_1+2s_2+\ldots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \frac{(s_1+s_2+\ldots+s_n)!}{s_1!s_2!\ldots s_n!} \cdot \frac{a_1^{s_1} a_2^{s_2} \ldots a_n^{s_n}}{a_0^{s_1+s_2+\ldots+s_n}}. \tag{3}$$

**2. Числа Пелля и составленные из них определители Теплица-Хессенберга.** Последовательность Пелля $\{P_n\}_{n \geq 0}$ – это последовательность целых чисел, удовлетворяющая рекуррентному уравнению

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \qquad n \geq 0,$$

с начальными условиями $P_0 = 0, \ \ P_1 = 1$ (последовательность A000119 в OEIS – Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей [3]).

Последовательность $\{P_n\}_{n\geq 0}$ начинается так:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, … .

Числа Пелля можно выразить также как функцию от номера *n* [4]

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}, \qquad n \geq 0. \tag{4}$$

Для бóльших значений *n* слагаемое $(1+\sqrt{2})^n$ доминирует в (4), так что числа Пелля примерно пропорциональны степеням серебряного сечения $1+\sqrt{2}$, аналогично тому, как числа Фибоначчи примерно пропорциональны степеням золотого сечения $(1+\sqrt{5})/2$.

Числа Пелля возникли при решении задачи рациональной аппроксимации числа $\sqrt{2}$ и имеют глубокие исторические корни. Сейчас эти числа используются для поиска квадратных треугольных чисел, для решения комбинаторных задач перечисления и в многих других математических задачах [4–7].

Рассмотрим теперь последовательность матриц Теплица-Хессенберга $\{M_n\}_{n\geq 0}$, элементами которых являются последовательные числа Пелля:

$$M_n = \begin{pmatrix} P_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_2 & P_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} & \cdots & P_1 & 1 \\ P_n & P_{n-1} & P_{n-2} & \cdots & P_2 & P_1 \end{pmatrix}, \qquad M_0 \equiv 1. \tag{5}$$

**Теорема 1.** *Для определителя матрицы Теплица-Хессенберга* $M_n$ *из* (5) *справедлива формула*

$$\det(M_n) = (-1)^{n-1} F_n, \quad n \geq 1, \tag{6}$$

*где* $F_n$ *– числа Фибоначчи.*

*Доказательство.* Используем метод математической индукции. Для $n=1$ $\det(M_1) = P_1 = F_1 = 1$. Предположим, что формула (6) справедлива для $k \leq n-1$ и докажем ее для $k = n$. Используя (2), (4) и известную формулу Бине для чисел Фибоначчи, из (5) получаем:

$$\det(M_n) = P_1 \det(M_{n-1}) + (-1)^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j P_{n+1-j} \det(M_{j-1}) =$$

$$= (-1)^n F_{n-1} - (-1)^n P_n + (-1)^n \sum_{j=2}^{n} (-1)^j P_{n+1-j} \cdot (-1)^{j-1} F_{j-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right) + (-1)^{n+1} \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{10}} \sum_{j=2}^{n} \left( (1+\sqrt{2})^{n+1-j} - (1-\sqrt{2})^{n+1-j} \right) \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{j-1} - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{j-1} \right),$$

откуда, после несложных преобразований, получаем формулу (6). Теорема доказана.

Аналогичные к (6) формулы для определителей Теплица-Хессенберга, элементами которых являются числа Фибоначчи и числа Люка, представлены в [8] и [9] соответственно.

Пусть $\{D_n\}_{n\geq 1}$ и $\{G_n\}_{n\geq 1}$ – последовательности матриц Теплица-Хессенберга, составленных из чисел Пелля с парными и непарными индексами соответственно:

$$D_n = \begin{pmatrix} P_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_4 & P_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{2n-2} & P_{2n-4} & P_{2n-6} & \cdots & P_2 & 1 \\ P_{2n} & P_{2n-2} & P_{2n-4} & \cdots & P_4 & P_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

и

$$G_n = \begin{pmatrix} P_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ P_3 & P_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{2n-3} & P_{2n-5} & P_{2n-7} & \cdots & P_1 & 1 \\ P_{2n-1} & P_{2n-3} & P_{2n-5} & \cdots & P_3 & P_1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

**Теорема 2.** *Для определителей матриц* $D_n$, $G_n$ *из* (7) *и* (8) *справедливы формулы*

$$\det(D_n) = (-1)^n \frac{(2-\sqrt{3})^n - (2+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}, \tag{9}$$

$$\det(G_n) = (-1)^{n+1} \frac{4 \cdot 5^{n-1} + \delta_{n1}}{5}, \tag{10}$$

*где* $\delta_{n1}$ *– символ Кронекера.*

Доказательство формул (9) и (10) производится методом математической индукции, аналогично доказательству теоремы 1.

**Основной результат.** Используя теперь формулу (3), як следствие из формул (6), (9), (10), после несложных преобразований получаем формулы для сумм произведений чисел Пелля (последовательных, с парными, непарными индексами) с полиномиальными коэффициентами.

**Теорема 3.** *Для чисел Пелля* $\{P_n\}_{n\geq 1}$ *справедливы формулы*

$$\sum_{s_1+2s_2+\ldots+ns_n=n}(-1)^{1+s_1+s_2+\ldots+s_n}\frac{(s_1+s_2+\ldots+s_n)!}{s_1!s_2!\ldots s_n!}P_1^{s_1}P_2^{s_2}\ldots P_n^{s_n}=F_n,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\ldots+ns_n=n}(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n}\frac{(s_1+s_2+\ldots+s_n)!}{s_1!s_2!\ldots s_n!}P_2^{s_1}P_4^{s_2}\ldots P_{2n}^{s_n}=\frac{(2-\sqrt{3})^n-(2+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\ldots+ns_n=n}(-1)^{1+s_1+s_2+\ldots+s_n}\frac{(s_1+s_2+\ldots+s_n)!}{s_1!s_2!\ldots s_n!}P_1^{s_1}P_3^{s_2}\ldots P_{2n-1}^{s_n}=\frac{4\cdot 5^{n-1}+0^n}{5}.$$

## Список литературы


1. Vein R., Dale P., Determinants and Their Applications in Mathematical Physics. New York: Springer.– 1999.

2. Merca M., A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix. Spec. Matrices. 2013.– Vol. 1. P. 10-16.

3. Sloane N.J.A., The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at https://ocis.org.

4. Koshy T., Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications. New York: Springer.– 2014.

5. Catarino P., Vasco P., Modified *k*-Pell sequence: some identities and ordinary generating function. Appl. Math. Sci. 2013. Vol. 7(121). P. 6031-6037.

6. Chow C.O., Ma S.M., Mansour T., Shattuck M., Counting permutations by cyclic peaks and valleys. Ann. Math. Informat. 2014. –Vol. 43.– P. 43-54.

7. Dasdemir A., On the Pell, Pell-Lucas and modified Pell numbers by matrix method. App. Math. Sci. 2011. –Vol. 5(64). –P. 3173-3181.

8. Goy T., Elementary problems and solutions. Problem B-1192. Fibonacci Quart. 2016. –Vol. 54 (3).– P. 272.