выполнении предположений (7) начально-краевая задача (4)-(6) имеет обобщенное решение из $W_{2,0}^{1}(a,\Gamma_T)$.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 начально-краевая задача (4)-(6) имеет не более одного обобщенного решения из пространства $W_{2,0}^{1}(a,\Gamma_T)$.

Список литературы

1. Провоторов В.В., Волкова А.С. Начально-краевые задачи с распределенными параметрами на графе / В.В. Провоторов, А.С. Волкова. – Воронеж, Научная книга, 2014. – 188 с.
2. Волкова А.С. Однозначная разрешимость начально-краевых задач с распределенными параметрами на графе / А.С. Волкова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 8. Вып. 5. С. 2473-2475.
3. Волкова А.С., Провоторов В.В. Обобщенные решения и обобщенные собственные функции краевых задач на геометрическом графе / А.С. Волкова, В.В. Провоторов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2014. – №3. – С. 3-18.

УДК: 511.176

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ МАТРИЦ ТЕПЛИЦА–ХЕССЕНБЕРГА

CHEBYSHEV POLYNOMIALS AND DETERMINANTS OF TOEPLITZ–HESSENBERG MATRICES

Гой Т.П., к. ф.-мат. н., доцент

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника

г. Ивано-Франковск, Украина

tarasgoy@yahoo.com

Аннотация: Установлены формулы для вычисления определителей матриц Теплица-Хессенберга специального вида, элементами которых являются многочлены Чебышева. Как следствие, нами получены новые формулы с мультиномиальными коэффициентами для многочленов Чебышева I и II родов.

Summary: We study the families of Toeplitz-Hessenberg determinants the entries of which are Chebyshev polynomials of the first and second kinds. Consequently, we obtain new formulas for the Chebyshev polynomials with multi-

nomial coefficients.

Ключевые слова: матрица Теплица-Хессенберга, многочлены Чебышева, мультиномиальный коэффициент.

Keywords: Toeplitz-Hessenberg matrix, Chebyshev polynomials, multinomial coefficient.

1. Введение. *Матрицей Теплица-Хессенберга n-го* порядка будем называть матрицу вида

$$M_n(a_0;a_1,...,a_n)=\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и $a_k \neq 0$ хотя бы для одного $k \in \{1,2,...,n\}$.

Определитель матрицы (1) будем называть *определителем Теплица-Хессенберга*. Этот определитель можно выразить через его элементы: [9]

$$\det(M_n)=\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n}(-a_0)^{n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)}p_n(s)a_1^{s_1}a_2^{s_2}\cdots a_n^{s_n}, \tag{2}$$

где $p_n(s)=\dfrac{(s_1+\cdots+s_n)!}{s_1!\cdots s_n!}$ – мультиномиальный коэффициент.

Для построения и описания моделей объектов в различных областях науки и техники часто используются многочлены Чебышева, которые обладают рядом замечательных свойств [8].

Известно, что *многочлены Чебышева первого рода* $\{T_n(x)\}_{n\geq 0}$ могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\quad T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x),\ n\geq 2.$$

Например, $T_2(x)=2x^2-1$, $T_3(x)=4x^3-3x$, $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$, $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$, $T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$, $T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$.

Многочлены Чебышева второго рода $\{U_n(x)\}_{n\geq 0}$ определяются соотношениями

$$U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x,\quad U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x),\quad n\geq 2.$$

Тогда $U_2(x)=4x^2-1$, $U_3(x)=8x^3-4x$, $U_4(x)=16x^4-12x^2+1$, $U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$, $U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1$, $U_7(x)=128x^7-192x^5+80x^3-8x$ и т.д.

2. Определители Теплица-Хессенберга, составленные из многочленов Чебышева. Для сокращения записи мы обозначим

$$\det(a_0; a_1, ..., a_n) \equiv \det(M_n(a_0; a_1, ..., a_n)).$$

Теорема 1. *Пусть* $n \geq 2$. *Тогда*

$$\det(T_0(x); T_1(x), T_2(x), ..., T_n(x)) = (-1)^n (1-x^2) x^{n-2},$$

$$\det(T_0(x); T_2(x), T_4(x), ..., T_{2n}(x)) = (-1)^n 4x^n (1-x^2)(2x^2-1)^{n-2},$$

$$\det(T_1(x); T_0(x), T_1(x), ..., T_{n-1}(x)) = (-1)^n (1-x^2)(2x^2-1)^{n-2},$$

$$\det(T_1(x); T_1(x), T_3(x), ..., T_{2n-1}(x)) = (-1)^n 4x^n (1-x^2)(4x^2-3)^{n-2},$$

$$\det(T_1(x); T_3(x), T_5(x), ..., T_{2n+1}(x)) = (-1)^n 4x^n (1-x^2),$$

$$\det(T_1(x); T_2(x), T_3(x), ..., T_{n+1}(x)) = (-1)^n (1-x^2),$$

$$\det(T_2(x); T_3(x), T_4(x), ..., T_{n+2}(x)) = (-1)^n x^{n-2} (1-x^2),$$

$$\det(T_2(x); T_4(x), T_6(x), ..., T_{2n+2}(x)) = (-1)^n 4x^2 (1-x^2).$$

Теорема 2. *Пусть* $n \geq 2$. *Тогда*

$$\det(-U_0(x); U_0(x), U_2(x), ..., U_{2n-2}(x)) = 4x^2 (4x^2-1)^{n-2},$$

$$\det(U_0(x); U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x)) = \delta_{n2},$$

$$\det(U_0(x); U_2(x), U_4(x), ..., U_{2n}(x)) = 4x^2,$$

$$\det(U_1(x); U_3(x), U_5(x), ..., U_{2n+1}(x)) = 4x^2 \delta_{n2},$$

$$\det(U_1(x); U_2(x), U_3(x), ..., U_{n+1}(x)) = (-1)^n,$$

$$\det(U_2(x); U_3(x), U_4(x), ..., U_{n+2}(x)) = (-2x)^{n-2},$$

$$\det(U_2(x); U_4(x), U_6(x), ..., U_{2n+2}(x)) = (-1)^n 4x^2,$$

где δ_{n2} *– символ Кронекера.*

Доказательство формул из теорем 1 и 2 производится методом математической индукции или путем элементарных преобразований соответствующих определителей.

3. Основные результаты. Используя формулу (2), из теорем 1 и 2, после несложных преобразований получаем формулы для сумм произведений многочленов Чебышева первого и второго родов (последовательных, с парными, непарными индексами) с мультиномиальными коэффициентами.

Теорема 3. *Для* $n \geq 2$ *имеют место тождества*

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) T_1^{s_1}(x) T_2^{s_2}(x) \cdots T_n^{s_n}(x) = (1-x^2) x^{n-2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) T_2^{s_1}(x) T_4^{s_2}(x) \cdots T_{2n}^{s_n}(x) = 4x^n (1-x^2)(2x^2-1)^{n-2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) x^{n-\sigma_n} T_0^{s_1}(x) T_1^{s_2}(x) \cdots T_{n-1}^{s_n}(x) = (1-x^2)(2x^2-1)^{n-2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) x^{-\sigma_n} T_1^{s_1}(x) T_3^{s_2}(x) \cdots T_{2n-1}^{s_n}(x) = 4(1-x^2)(4x^2-3)^{n-2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) x^{-\sigma_n} T_3^{s_1}(x) T_5^{s_2}(x) \cdots T_{2n+1}^{s_n}(x) = 4(1-x^2),$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) x^{n-\sigma_n} T_2^{s_1}(x) T_3^{s_2}(x) \cdots T_{n+1}^{s_n}(x) = 1-x^2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) (2x^2-1)^{n-\sigma_n} T_3^{s_1}(x) T_4^{s_2}(x) \cdots T_{n+2}^{s_n}(x) = x^{n-2}(1-x^2),$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) (2x^2-1)^{n-\sigma_n} T_4^{s_1}(x) T_6^{s_2}(x) \cdots T_{2n+2}^{s_n}(x) = 4x^2(1-x^2),$$

где $\sigma_n = s_1 + \cdots + s_n$, *а суммирование производится по всевозможным наборам натуральных чисел* $s_1,...,s_n$, *для которых* $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$.

Теорема 4. *Для* $n \geq 2$ *имеют место тождества*

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} p_n(s) U_0^{s_1}(x) U_2^{s_2}(x) \cdots U_{2n-2}^{s_n}(x) = 4x^2(4x^2-1)^{n-2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) U_1^{s_1}(x) U_2^{s_2}(x) \cdots U_n^{s_n}(x) = (-1)^n \delta_{n2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) U_2^{s_1}(x) U_4^{s_2}(x) \cdots U_{2n}^{s_n}(x) = 4(-1)^n x^2,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) (2x)^{n-\sigma_n} U_3^{s_1}(x) U_5^{s_2}(x) \cdots U_{2n+1}^{s_n}(x) = 4(-1)^n \delta_{n2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) (2x)^{n-\sigma_n} U_2^{s_1}(x) U_3^{s_2}(x) \cdots U_{n+1}^{s_n}(x) = 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) (4x^2-1)^{n-\sigma_n} U_3^{s_1}(x) U_4^{s_2}(x) \cdots U_{n+2}^{s_n}(x) = (-2x)^{n-2},$$

$$\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n} (-1)^{\sigma_n} p_n(s) (4x^2-1)^{n-\sigma_n} U_4^{s_1}(x) U_6^{s_2}(x) \cdots U_{2n+2}^{s_n}(x) = 4x^2,$$

где $\sigma_n = s_1 + \cdots + s_n$, δ_{n2} *– символ Кронекера, а суммирование производится по всевозможным наборам натуральных чисел* $s_1,...,s_n$, *для которых* $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$.

В [1]–[7] автором получены формулы с мультиномиальными коэффициентами для чисел Фибоначчи, Люка, Пелля, Якобсталя, Якобсталя-Люка, Каталана, трибоначчи, аналогичные формулам из теорем 3 и 4.

Список литературы

1. Гой Т.П. Определители матриц Теплица-Хессенберга и числа Люка / Межвуз. сб. науч. трудов “Математика и естественные науки. Теория и прак-

тика”. — Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. — Вып. 11. — С. 32–36.

2. Гой Т.П. Про нові формули для чисел Фібоначчі / Матеріали VIII Всеукр. наук.-техн. конф. «Інформатика та системні науки». — Полтава: ПУЕТ, 2017. — С. 51–54.

3. T. Goy. On new Catalan identities using Toeplitz–Hessenberg matrices / 11th Inter. Algebraic Conf. in Ukraine. — Kyiv: Institute of Mathematics, 2017. — P. 49.

4. T. Goy. On Pell identities with multinomial coefficients / Inter. Conf. “Numbers, Forms and Geometry”. — Khabarovsk: Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, 2017. — Pp. 23–24.

5. T. Goy. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas identities with multinomial coefficients / Inter. Conf. “Actual Problems of Pure and Applied Mathematics”. — Almaty: Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 2017. — Pp. 61–64.

6. T. Goy. Some combinatorial identities for two-periodic Fibonacci sequence / XII Междунар. конф. “Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики”. — Махачкала: ДГУ, 2017. — С. 107–109.

7. T. Goy. Some tribonacci identities using Toeplitz-Hessenberg determinants / 18th Inter. Scientific M. Kravchuk Conf., Vol. 1. — Kyiv: NTUU “KPI”, 2017. — Pp. 159–161.

8. J. C. Mahom and D. C. Handcomb. Chebyshev Polynomials. — Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2003.

9. M. Merca. A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix / Special Matrices. — 2013. — Vol. 1. — Pp. 10–16.