УДК 517.946

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА, РАСПАДАЮЩЕГОСЯ НА ВОЛНОВЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Савка И.Я.[1,2]**, Гой Т.П.**[1]

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, г. Ивано-Франковск, Украина

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, г. Львов, Украина

s-i@ukr.net, tarasgoy@yahoo.com

Аннотация. На основании метрического подхода исследован вопрос о классической корректности задачи с нелокальными условиями для факторизированных гиперболических уравнений парного порядка в цилиндрической области.

Ключевые слова: некорректная краевая задача, нелокальные краевые условия, малые знаменатели, гиперболический оператор.

Задачи с нелокальными условиями по временной переменной для уравнений в частных производных, вообще говоря, некорректны по Адамару. Единственность решений таких задач во многих случаях зависит от диофантовых свойств коэффициентов и параметров задачи, а разрешимость и гладкость решений связаны с проблемой малых знаменателей [1–3].

В настоящей работе установлена однозначная разрешимость краевой задачи с нелокальными условиями второго рода по времени [4] и условиями периодичности по пространственным переменным для гиперболического оператора, распадающегося на волновые операторы Клейна – Гордона.

Постановка задачи. Пусть S – единичная окружность, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in S^p$,

$$k=(k_1,\ldots,k_p)\in \mathbf{Z}^p,\quad (k,x)=\sum_{j=1}^{p}k_jx_j,\quad \|k\|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_p^2},\quad Q=\left\{t\in(0,T),\ x\in S^p\right\};$$

$$H_q=\left\{\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^p}\varphi_k e^{i(k,x)}:\|\varphi\|_q^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}^p}\left(1+\|k\|^2\right)^q|\varphi_k|^2<\infty\right\}$$ – пространство Соболева

на p-мерном торе S^p, где $q \in \mathbf{R}$, φ_k – коэффициенты Фурье функции φ;

$$C^m([0,T];H_q) = \left\{ u(t,x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)} : \ \|u\|_{q,m}^2 = \sum_{s=0}^{m} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s} \right\|_{q-s}^2 < \infty \right\}.$$

В области Q исследуем задачу

$$P\left(\partial/\partial t, \partial/\partial t\right)[u] \equiv \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_j^2 \Delta + c_j^2 \right) u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$B_j[u] \equiv \mu_1 \left. \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} + \mu_2 \left. \frac{\partial^{j-2} u}{\partial t^{j-2}} \right|_{t=0} + \mu_3 \left. \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=T} - \mu_2 \left. \frac{\partial^{j-2} u}{\partial t^{j-2}} \right|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad j = \overline{1,2n}, \tag{2}$$

где $a_j \in \mathbf{R}$, $c_j \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $c_m \neq c_j$ $(m \neq j)$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{C}$, $\mu_2 \neq 0$, $u_t^{(-1)} \equiv \int_0^t u(t,\tau) d\tau$, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2}$ – оператор Лапласа, $\varphi_j \in H_{q+1-j}$, оператор P – гиперболический за Петровским.

Под решением задачи (1), (2) из пространства $C^{2n}([0,T];H_q)$ будем понимать функцию $u = u(t,x)$, которая удовлетворяет равенствам

$$\left\| P\left(\partial/\partial t, \partial/\partial x\right)[u] \right\|_{q-2n,0} = 0, \qquad \left\| B_j[u] - \varphi_j \right\|_{q+1-j} = 0, \quad j = \overline{1,2n}.$$

Условия единственности решения. Решение задачи (1), (2) ищем в виде ряда Фурье $u(t,x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)}$. Тогда каждая из функций $u_k(t)$ является решением нелокальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения $2n$-го порядка

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d^2}{dt^2} + a_j^2 \|k\|^2 + c_j^2 \right) u_k(t) = 0, \quad B_j[u_k] = \varphi_{jk}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

Решение задачи (3) представляется в виде

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^{n} \left(C_{sk}^- \exp\left(-i\lambda_{sk} t\right) + C_{sk}^+ \exp\left(i\lambda_{sk} t\right) \right),$$

где $\lambda_{sk} = \sqrt{a_s^2 \|k\|^2 + c_s^2}$, а коэффициенты C_{sk}^-, C_{sk}^+, $j = \overline{1,n}$, определяются из линейной системы уравнений

$$\sum_{s=1}^{n}\Big[\Big(\mu_1(-i\lambda_{sk})^{j-1}+\mu_3(-i\lambda_{sk})^{j-1}\exp\left(-i\lambda_{sk}T\right)+\mu_2(-i\lambda_{sk})^{j-2}\left(1-\exp\left(-i\lambda_{sk}T\right)\right)\Big)C_{sk}^{-}+$$
$$+\Big(\mu_1(i\lambda_{sk})^{j-1}+\mu_3(i\lambda_{sk})^{j-1}\exp\left(i\lambda_{sk}T\right)+\mu_2(i\lambda_{sk})^{j-2}\left(1-\exp\left(i\lambda_{sk}T\right)\right)\Big)C_{sk}^{+}\Big]=\varphi_{jk},\quad j=\overline{1,2n},$$

определитель которой обозначим через D_k. Тогда

$$D_k=(-1)^{n(n-1)/2}2^n i^{n(2n-1)}\prod_{1\le p<q\le n}\left(\lambda_{qk}^2-\lambda_{pk}^2\right)^2\prod_{s=1}^{n}\left(\lambda_{sk}M_{sk}^{-}M_{sk}^{+}\right),\tag{4}$$

где

$$M_{sk}^{\pm}=\mu_1+\mu_3\exp\left(\pm i\lambda_{sk}T\right)+\mu_2(\pm i\lambda_{sk})^{-1}\left(1-\exp\left(\pm i\lambda_{sk}T\right)\right).$$

Теорема 1. *Для единственности решения задачи* (1), (2) *в пространстве* $C^n([0,T],H_q)$ *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $k\in\mathbf{Z}^p$

$$M_{sk}^{\pm}\neq 0,\quad s=\overline{1,n}.\tag{5}$$

Условия существования решения. Пусть выполняются условия (5). Тогда решение задачи (1), (2) представляется формальным рядом

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}^p}\sum_{j=1}^{2n}\sum_{s=1}^{n}\frac{(-i)^{1-j}\varphi_{jk}}{\lambda_{sk}\prod\limits_{m=1,m\neq s}^{n}\left(\lambda_{sk}^2-\lambda_{mk}^2\right)}\times$$
$$\times\left(\frac{S_{2n-j}^{-}[\lambda_{sk}]}{M_{sk}^{-}}\exp\left(-i\lambda_{sk}t\right)-\frac{S_{2n-j}^{+}[\lambda_{sk}]}{M_{sk}^{+}}\exp\left(i\lambda_{sk}t\right)\right)\exp\left(i(k,x)\right),\tag{6}$$

где $S_q^{-}[\lambda_{sk}]$ – сумма всевозможных произведений чисел $-\lambda_{1k},\ldots,-\lambda_{s-1,k},-\lambda_{s+1,k},\ldots,$ $-\lambda_{n,k},\lambda_{1k},\ldots,\lambda_{n,k}$, взятых в количестве q штук; $S_q^{+}[\lambda_{sk}]$ – сумма всевозможных произведений чисел $-\lambda_{1k},\ldots,-\lambda_{n,k}$, $\lambda_{1k},\ldots,\lambda_{s-1,k},\lambda_{s+1,k},\ldots,\lambda_{n,k}$, взятых в количестве q штук, причем, по умолчанию, считается, что $S_0^{-}[\lambda_{sk}]=S_0^{+}[\lambda_{sk}]=1$.

В знаменатели формулы (6) входят выражения $M_{sk}^{\pm}$, $s=\overline{1,n}$, которые будучи отличными от нуля, могут принимать как угодно малые значения для бесконечного множества векторов $k\in\mathbf{Z}^p$. Таким образом, вопрос о существовании решения задачи (1), (2) связан с проблемой малых знаменателей, для преодоления которой эффективно используется метрический подход [2, 3].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (5) *и существуют такие постоянные* $C_1 > 0$ *и* $\alpha \in \mathbf{R}$, *что для всех* (*кроме конечного числа векторов* $k \in \mathbf{Z}^p$)

$$\left| M_{sk}^{\pm} \right| \geq C_1 \|k\|^{-\alpha}, \quad s = \overline{1,n}, \tag{7}$$

Если $\varphi_j \in H_{q+2n-1+\alpha-j}$, $j = \overline{1,2n}$, *то существует единственное решение* $u \in C^n([0,T], H_q)$ *задачи* (1), (2), *непрерывно зависящее от функций* φ_j, $j = \overline{1,2n}$.

Выполнение неравности (7) для каждого фиксированного $s \in \{1,...,n\}$ доказано для случая, когда

$$\left(|\mu_1| - |\mu_3| \right)^2 + \mathrm{Im}^2 \left(\frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_2} \right) \neq 0. \tag{8}$$

Если неравенство (8) не выполняется, то с помощью метрического подхода установлено выполнение оценок (7) для почти всех (относительно мери Лебега) чисел $T > 0$.

Данные результаты распространяются на случай, когда в разложении оператора P есть кратные множители.

Список литературы

1. **Власій, О. Д.** Крайова задача з нелокальними умовами другого роду для гіперболічного факторизованого оператора / О. Д. Власій, Т. П. Гой, І. Я. Савка // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2014. – Вип. 25, № 1. – С. 33–46.
2. **Ільків, В. С.** Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В. С. Ільків, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 49, № 2. – С. 186–195.
3. **Пташник, Б. И.** Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б. И. Пташник. – К. : Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. **Пулькина, Л. С.** Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода / Л. С. Пулькина // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 4. – С. 74–83.