$$2s_3 + \omega_0\left(B_{11} + B_{22}\right) + 2a_0\left(C_{11} - C_{33}\right) = 0,$$

а решение редуцированных уравнений имеет вид

$$\lambda_1(t) = C_1^* \sin\omega_0 t + C_2^* \cos\omega_0 t + \frac{B_0}{\omega_0} - \frac{D_3}{3\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t - \frac{D_4}{3\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t,$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{\omega_0}\Big[-A_0\left(\omega_0 C_1^* - A_2\right)\cos\omega_0 t - \left(\omega_0 C_2^* + A_1\right)\sin\omega_0 t +$$

$$+\left(\frac{2D_4}{3\omega_0} - A_3\right)\sin 2\omega_0 t - \left(\frac{2D_3}{3\omega_0} + A_4\right)\cos 2\omega_0 t\Big].$$

Во втором варианте векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ компланарны, а параметры задачи удовлетворяют равенствам

$$C_{13} = 0,\ C_{23} = 0,\ 2s_3 + \omega_0\left(B_{11} + B_{22}\right) + a_0\left(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}\right) = 0.$$

Третий вариант характеризуется общим расположением векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ только в случае, когда в уравнение (1) не входит матрица C. Если же $C \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, определяющие вектор гиростатического момента, лежат в некоторой плоскости, ортогональной оси с направляющим вектором

$$\gamma_1 = \frac{2C_{12}C_{23} + C_{13}\left(C_{11} - C_{22}\right)}{2\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right)}\gamma_3, \quad \gamma_2 = \frac{2C_{12}C_{13} - C_{23}\left(C_{11} - C_{22}\right)}{2\left(C_{13}^2 + C_{23}^2\right)}\gamma_3,$$

$$\gamma_3 = 2\sqrt{\frac{C_{13}^2 + C_{23}^2}{4\left(C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2\right) + \left(C_{11} - C_{22}\right)}}.$$

Гой Т.П.[1]**, к.ф.-м.н., доцент**

Савка І.Я.[1,2]**, к.ф.-м.н.**

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

(*Україна, м. Івано-Франківськ*)[1]

Інститут прикладних проблем механіки і математики

імені Я.С. Підстригача НАН України

(*Україна, м. Львів*)[2]

ПРО ЗАДАЧУ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО ОПЕРАТОРА ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

1. Вступ. Значне зростання інтересу до крайових задач з нелокальними умовами за часом для гіперболічних рівнянь і систем зумовлене передовсім їх широким практичним застосуванням у моделюванні різноманітних процесів та явищ (див., наприклад, [1] і бібліографію там).

Такі задачі є, взагалі, некоректними за Адамаром, а їхня розв'язність для обмежених областей зазвичай є нестійкою щодо малих змін параметрів задачі та пов'язана з проблемою малих знаменників. Для подолання проблеми малих знаменників ефективним виявився метричний підхід [1, 2].

2. Постановка задачі. У циліндричній області $Q=\{(t,x):\ t\in(0,T),\ x\in\Omega\}$, де Ω – одиничне коло, досліджуємо задачу

$$P[u]\equiv\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_j\frac{\partial}{\partial x}-b_j\right)u(t,x)=f(t,x), \tag{1}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-j}c_{qj}^{s}\frac{\partial^q}{\partial x^q}\left(\mu_1\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0}+\mu_2\left.\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0}+\mu_3\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=T}-\mu_2\left.\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T}\right)=0,\quad s=\overline{1,n}, \tag{2}$$

де $a_j,b_j\in\mathrm{R}$, $b_m\neq b_l$ $(m\neq l)$, c_{qj}^{s}, $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in\mathrm{C}$, $\mu_2\neq0$, оператор P – гіперболічний за І. Петровським. Кожна умова в (2) містить інтеграл $\dfrac{\partial^{-1}u}{\partial t^{-1}}\equiv\displaystyle\int_0^t u(\tau,x)\,d\tau$.

Вигляд області Q накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ і $f(t,x)$.

3. Умови єдиності розв'язку. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathrm{Z}}u_k(t)e^{ikx}. \tag{3}$$

Тоді кожна функція $u_k(t)$ з (3) є розв'язком відповідної задачі з нелокальними крайовими умовами для звичайного диференціального рівняння:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}-\gamma_j(k)\right)u_k(t)=f_k(t), \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{q=0}^{n-j}c_{qj}^{s}(ik)^q\left(\mu_1u_k^{(j)}(0)+\mu_2u_k^{(j-1)}(0)+\mu_3u_k^{(j)}(T)-\mu_2u_k^{(j-1)}(T)\right)=0,\ s=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де $\gamma_j(k)=a_jk\cdot i+b_j$, а $f_k(t)$ – коефіцієнти Фур'є функції $f(t,x)$.

Характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі (4), (5) визначається формулою

$$\Delta(k)=D(k)\cdot\prod_{j=1}^{n}M_j(k)\cdot\prod_{1\le p<q\le n}\left(\gamma_q(k)-\gamma_p(k)\right),$$

де

$$D(k)=\det\left\|\sum_{q=0}^{n+1-m}c_{q,m-1}^{s}(ik)^q\right\|_{s,m=1,\dots,n},$$

$$M_j(k)=\begin{cases}\mu_1+\mu_3e^{\gamma_j(k)T}+\mu_2\left(\gamma_j(k)\right)^{-1}\left(1-e^{\gamma_j(k)T}\right), & \gamma_j(k)\neq0,\\ \mu_1+\mu_3-\mu_2T, & \gamma_j(k)\neq0.\end{cases} \tag{6}$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) у *просторі* $C^n\left(\overline{Q}\right)$ *необхідно й досить, щоб для всіх* $k\in\mathbf{Z}$ *справджувались умови*

$$D(k)\neq 0,\qquad M_j(k)\neq 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{7}$$

4. Умови існування розв'язку. За виконання умов (7) для кожного $k\in\mathbf{Z}$ існує єдина функція Ґріна $G_k(t,\tau)$ задачі (4), (5), за допомогою якої розв'язок цієї задачі зображується формулою

$$u_k(t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau,\quad k\in\mathrm{Z}.$$

Тоді розв'язок задачі (1), (2), з урахуванням (3), подається у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathrm{Z}}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)\,d\tau\cdot e^{ikx}. \tag{8}$$

У квадраті $\{(t,\tau):\ 0\le t,\tau\le T\}$ функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathrm{Z}\setminus\{0\}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau)=\frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{\gamma_j(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{p=1,\ p\neq j}^{n}\left(\gamma_p(k)-\gamma_j(k)\right)}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^q\,e^{\gamma_j(k)t}S_{n-q}^{j}(k)\left(\left(\gamma_s(k)\right)^q\sigma_s(k)e^{-\gamma_s(k)\tau}-2\mu_3\delta_{q1}\right)}{M_j(k)\prod\limits_{p=1,\,p\neq j}^{n}\left(\gamma_p(k)-\gamma_j(k)\right)\prod\limits_{p=1,\,p\neq s}^{n}\left(\gamma_p(k)-\gamma_s(k)\right)},$$

де

$$\sigma_s(k)=\mu_1-\mu_3e^{\gamma_s(k)T}+\mu_2\left(\gamma_s(k)\right)^{-1}\left(1+e^{\gamma_s(k)T}\right),\qquad s=\overline{1,n};$$

$S_{n-q}^{j}(k)$ – сума всіх можливих добутків виразів $\gamma_1(k),\ldots,\gamma_{j-1}(k),\gamma_{j+1}(k),\ldots,\gamma_n(k)$ у кількості $n-q$; δ_{q1} – символ Кронекера.

Збіжність ряду (8), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази $M_j(k)$, $j=\overline{1,n}$, з (6), які входять знаменниками у формулу (8), можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих чисел k.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (7) *та існують такі числа* $C_1>0$ *і* $\alpha\in\mathrm{R}$, *що для всіх* (*крім скінченної кількості* $k\in\mathbf{Z}$) *виконуються нерівності*

$$\left|M_j(k)\right|\ge C_1|k|^{-\alpha},\quad j=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Якщо $f \in C^{(0,[\alpha]+2N+2)}\overline{(Q)}$, *де* $[\alpha]$ – *ціла частина числа* α, $N = \max\{l_1,\ldots,l_n\}$, l_s – *кратність кореня* $\lambda = a_s$ *многочлена* $(\lambda - a_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda - a_n)$, *то існує єдиний розв'язок* $u \in C^n\overline{(Q)}$ *задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від функції* $f(t,x)$.

5. Метричні оцінки малих знаменників. Проаналізуємо можливість виконання оцінок (9). Нехай $z = \mu_1/\mu_2$, $h = \mu_3/\mu_2$. Для кожного $j = \{1,\ldots,n\}$, зафіксувавши числа $b_j \neq 0$ і T, позначимо множини:

$$W_j = \left\{(z,h) \in \mathrm{C}^2 : \frac{\left|1 - e^{b_jT}\right|}{2\left|b_j\right|e^{b_jT}} \leq |h| \leq \frac{\left|1 + e^{b_jT}\right|}{2\left|b_j\right|e^{b_jT}}\right\},$$

$$K_j = \left\{h \in \mathrm{C} : \left(\mathrm{Re}\,h - 1/(2b_j)\right)^2 + \mathrm{Im}^2 h = \left(2\left|b_j\right|^2 e^{b_jT}\right)^{-2}\right\},$$

$$\Gamma_j = \left\{(z,h) \in \mathrm{C}^2 : h \in K_j,\ z = -he^{2b_jT} + \left(e^{2b_jT} - 1\right)\left(2b_j\right)^{-1}\right\}.$$

Якщо $(z,h) \notin \Gamma_j \cap W_j$, то оцінка (9) виконується при певних чисел C_1 і α. У протилежному випадку справджується теорема 3.

Теорема 3. *Якщо* $b_j \neq 0$ *для деякого* $j = \{1,...,n\}$, *то для майже всіх* (*стосовно індукованої міри Лебега на* Γ_j) *точок* $(z,h) \in \Gamma_j \cap W_j$ *нерівність*

$$\left|M_j(k)\right| \geq e^{b_jT}\left|e^{b_jT} - 1\right| \cdot \left|\mu_2\right|^{-1} \cdot |k|^{-\alpha}$$

справджується для всіх (*крім скінченної кількості*) *значень* $k \in \mathbf{Z}$ *при* $\alpha > 1$.

Теорема 4. *Якщо* $z = -h$, $h \neq 0$ і $b_j = 0$ *для деякого* $j = \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* **R**) *чисел* a_j *нерівність* (9) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *значень* $k \in \mathbf{Z}$ *при* $\alpha > 0$.

Теорема 5. *Якщо* $z = \overline{h}$ *і* $b_j = 0$ *для деякого фіксованого* $j = \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbf{R}^2$) *чисел* $(\mathrm{Re}\,h,\ \mathrm{Im}\,h)$ *нерівність* (9) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) $k \in \mathrm{Z}$ *при* $\alpha > 1$.

Теорема 6. *Якщо* $\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$ *і* $a_j \neq 0$ *для деякого* $j = \{1,\ldots,n\}$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* **R**) *чисел* $T > 0$ *нерівність* (9) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) $k \in \mathrm{Z}$ *при* $\alpha > 2 - \mathrm{sgn}\left|\mu_1\right|$.

Література

1. Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. Ільків В.С. Задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників / В.С. Ільків, Б.Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, №12. – С. 1624-1650.