УДК 517.589, 517.926.4

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ВОЗРАСТАЮЩИХ И ЦЕНТРАЛЬНЫХ ФАКТОРИАЛОВ

ON DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FUNCTION DEFINED BY RISING AND CENTRAL FACTORIALS

Гой Т.П.

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника,

г. Ивано-Франковск, Украина

tarasgoy@yahoo.com

DOI: 10.12737/4702

Аннотация. Исследуются новые неэлементарные функции действительного переменного, построенные с помощью возрастающих и центральных факториальных степеней. Показана связь этих функций с обобщенными гипергеометрическими функциями. Установлены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются новые функции.

Abstract. We consider new functions defined by rising and central factorials. We have established their relationship with the hypergeomertic functions. It is shown, that constructed functions are solutions of ordinary differential equations, derived in the article.

Ключевые слова: возрастающая факториальная степень, центральная факториальная степень, обобщенная гипергеометрическая функция, задача Коши.

Keywords: rising factorial power, central factorial power, generalized hypergeometric function, Cauchy problem.

1. Факториальные степени. Для произвольных $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ *факториальной степенью* m с шагом $k \in \mathbf{R}$ называется выражение

$$x^{m\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(m-1)k), & \text{если } m \neq 0, \\ 1, & \text{если } m = 0. \end{cases}$$

Факториальную степень называют *возрастающей*, если $k > 0$, и *убывающей*, если $k < 0$. В случае $k = 0$ имеем $x^{m\{0\}} = x^m$.

Возрастающую факториальную степень m с шагом 1 и убывающую факториальную степень m с шагом (– 1) будем обозначать $x^{\overline{m}}$ и $x^{\underline{m}}$ соответственно, т.е.

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+m-1), \qquad x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Возрастающие и убывающие факториальные степени тесно связаны с обычной факториальной функцией, а именно: $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Для произвольных $x \in \mathbf{R}$ и $m \in \mathbf{N}$ *центральной факториальной степенью* m с шагом $k > 0$ называется выражение

$$x^{m[k]} = \begin{cases} x\left(x + mk/2 - k\right)\left(x + mk/2 - 2k\right)\cdot\ldots\cdot\left(x - mk/2 + k\right), & \text{если } m \neq 0, \\ 1, \quad \text{если } m = 0. \end{cases}$$

Центральную факториальную степень m с шагом 1 будем обозначать $x^{[m]}$. Например,

$$x^{[4]} = x^{4[1]} = (x-1)x^2(x+1), \qquad x^{[5]} = x^{5[1]} = \left(x - 3/2\right)\left(x - 1/2\right)x\left(x + 1/2\right)\left(x + 3/2\right).$$

В комбинаторике возрастающим, убывающим и центральным факториальным степеням часто присуща двойственность: если комбинаторная задача приводит к тождеству, построенному при помощи, например, убывающих факториальных степеней, то обычно существует содержательная комбинаторная задача, которая приводит к двойственному тождеству с участием возрастающих или центральных факториальных степеней. Основные свойства и некоторые применение факториальных степеней можно найти в [4]-[6].

2. Функции, определенные с помощью возрастающих и центральных факториальных степеней. По аналогии с известными степенными рядами

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

которые можно рассматривать как ряды, построенные с помощью убывающих факториальных степеней ($n! = n^{\underline{n}}$), в [2] определены новые неэлементарные функции действительной переменной $\mathrm{Cos}(x)$ и $\mathrm{Sin}(x)$ с помощью соответственных возрастающих факториальных степеней:

$$\mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}} x^{2n}, \qquad \mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}} x^{2n+1}, \tag{1}$$

а в [3] – функции $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$, определенные с помощью центральных факториальных степеней:

$$\widetilde{C}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^{[2n]}}x^{2n}, \qquad \widetilde{S}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{[2n+1]}}x^{2n+1}. \tag{2}$$

В частности, установлены некоторые свойства этих функций, построены их графики, установлена связь функций $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ с интегралами Френеля.

Пусть ${}_1F_2\left(a_1;b_1,b_2;z\right)$ – обобщенная гипергеометрическая функция, т.е. функция, определенная как сумма обобщенного гипергеометрического ряда [1]

$${}_1F_2\left(a_1;b_1,b_2;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_1^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}b_2^{\overline{n}}}\cdot\frac{z^n}{n!},$$

где $a_1^{\overline{n}}, b_1^{\overline{n}}, b_2^{\overline{n}}$ – возрастающие факториальные степени.

Теорема 1. Для всех $x\in\mathbf{R}$ имеют место тождества

$$\mathrm{Cos}(x)=1-\frac{x^2}{6}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right), \qquad \mathrm{Sin}(x)=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right). \tag{3}$$

Теорема 2. [3] Для всех $x\in\mathbf{R}$ имеют место тождества

$$\widetilde{C}(x)=1-\frac{x^2}{4}\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{4}{3},\frac{5}{3};-\frac{x^2}{27}\right), \qquad \widetilde{S}(x)=x\cdot{}_1F_2\left(1;\frac{5}{6},\frac{7}{6};-\frac{x^2}{27}\right). \tag{4}$$

3. Дифференциальные уравнения функций $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$. Покажем, что функции $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$, определенные с помощью формул (1), (2), являются решениями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами.

Теорема 3. *Функции* $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ *являются решениями соответственно таких задач Коши*:

$$16x^2y''-16xy'+(x^2+12)y=12-x^2, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0;$$

$$16x^2y''-16xy'+(x^2+12)y=-4x, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

Теорема 4. *Функции* $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$ *являются решениями соответственно таких задач Коши*:

$$27x^3y'''-27x^2y''+(4x^3+51x)y'-48y=-48, \quad y(0)=1,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1/2;$$

$$27x^3y'''+(4x^3+24x)y'+(4x^2-24)y=0, \quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0.$$

При доказательстве теорем 3, 4 используется тот факт [1], что обобщенная гипергеометрическая функция

$$w(z) = {}_1F_2\left(a_1; b_1, b_2; z\right),$$

с помощью которой по формулам (3), (4) выражаются функции $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$, $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$, удовлетворяет обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\left(\sigma(\sigma + b_1 - 1)(\sigma + b_2 - 1) - z(\sigma + a_1)\right) w(z) = 0,$$

где σ – дифференциальный оператор $\sigma = z\dfrac{d}{dz}$.

Следствие из теоремы 3. *Функции* $\mathrm{Cos}(x)$, $\mathrm{Sin}(x)$ – *частные решения линейного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка*

$$16x^3 y^{(4)} + 48xy''' + (x^2 + 12)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Список литературы

1. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – 294 с.
2. Гой Т. П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський матем. журн. – 2013. – Т.1, № 1-2. – С. 28-33.
3. Гой Т. П. Функції, породжені центральними факторіальними степенями, та їхні властивості / Т. П. Гой // Збірник матеріалів Міжнар. наук.-практ. конф. «Теоретичні та прикладні проблеми технічних і математичних наук». – К. : Центр Науково-Практичних Студій, 2014. – 8–13 с.
4. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. – Івано-Франківськ : Сімик, 2010. – 508 с.
5. Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. – М. : Наука, 1982. – 254 с.
6. Jordan C. Calculus of Finite Differences / C. Jordan. – New York : Chelsea Publishing, 1939. – 652 p.