ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ЦЕНТРАЛЬНИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ СТЕПЕНЯМИ

Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
(Україна, Івано-Франківськ)

E-mail: tarasgoy@yahoo.com

Позначимо через $n^{\overline{m}}$, $n^{\underline{m}}$, $n^{[m]}$ $(n, m \in \mathbb{N})$ відповідно зростаючі, спадні і центральні факторіальні степені

$$n^{\overline{m}} = n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+m-1),$$
$$n^{\underline{m}} = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1),$$
$$n^{[m]} = n\left(n + \tfrac{m}{2} - 1\right)\left(n + \tfrac{m}{2} - 2\right) \cdot \ldots \cdot \left(n - \tfrac{m}{2} + 1\right).$$

Зручно вважати, що $n^{\overline{0}} = n^{\underline{0}} = n^{[0]} = 1$. Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Класичні трансцендентні функції e^x, $\sin x$, $\cos x$ задаються як степеневі ряди із звичайними факторіалами, які можна розглядати як спадні факторіальні степені, тобто

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\underline{n}}},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{\underline{2n}}}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}}.$$

Замінивши у цих степеневих розвиненнях спадні факторіальні степені відповідними центральними факторіальними степенями, одержуємо нові неелементарні функції

$$\widetilde{E}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^{[n]}},$$

$$\widetilde{C}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)^{[2n]}}, \quad \widetilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^{[2n+1]}},$$

основні досліджені властивості яких сформулюємо у вигляді теорем.

Теорема 1. *Для всіх x справджуються співвідношення*

$$\widetilde{E}(x) = 1 + \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1;\, \frac{4}{3}, \frac{5}{3};\, \frac{x^2}{27}\right) + x \cdot {}_1F_2\left(1;\, \frac{5}{6}, \frac{7}{6};\, \frac{x^2}{27}\right),$$

$$\widetilde{C}(x) = 1 - \frac{x^2}{4} \cdot {}_1F_2\left(1;\, \frac{4}{3}, \frac{5}{3};\, -\frac{x^2}{27}\right),$$

$$\widetilde{S}(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1;\, \frac{5}{6}, \frac{7}{6};\, -\frac{x^2}{27}\right),$$

де ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z)$ – узагальнена гіпергеометрична функція:

$${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\, b_2^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

$a_1^{\overline{n}}$, $b_1^{\overline{n}}$, $b_2^{\overline{n}}$ – зростаючі факторіальні степені.

Теорема 2. *Функції $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$ є розв'язками відповідно таких задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь третього порядку:*

$$27x^3y''' - 27x^2y'' + (4x^3 + 51x)y' - 48y + 48 = 0,$$
$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -\tfrac{1}{2};$$
$$27x^3y''' + (4x^3 + 24x)y' + (4x^2 - 24)y = 0,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$$

Побудовані графіки функцій $\widetilde{E}(x)$, $\widetilde{C}(x)$, $\widetilde{S}(x)$. Встановлені деякі співвідношення між цими функціями. Зокрема, справджується формула $\widetilde{E}(\pm ix) = \widetilde{C}(x) \pm i\,\widetilde{S}(x)$, аналогічна до формули Ейлера, наслідком якої є співвідношення $\widetilde{C}^2(x) + \widetilde{S}^2(x) = \widetilde{E}(ix) \cdot \widetilde{E}(-ix)$.