

К. ф.-м. н. Гой Т.П.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ФАКТОРИЗОВАНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В області $Q = \{(t, x) : t \in (0, T), x \in \Omega\}$, де $\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ – p -вимірний тор, досліджуємо задачу

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^p a_{js} \frac{\partial}{\partial x_s} + b_j \right) u(t, x) = f(t, x) + \varepsilon F(t, x, u), \quad (1)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|q|=0}^{n-j} c_{jq}^l \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_p^{q_p}} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \Big|_{t=0} + \omega \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^j u(t, x)}{\partial t^j} \Big|_{t=T} - \omega \frac{\partial^{j-1} u(t, x)}{\partial t^{j-1}} \Big|_{t=T} \right) = 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (2)$$

де $a_{js}, b_j \in \mathbb{R}$, $c_{jq}^l \in \mathbb{C}$, $\varepsilon, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$, $q = (q_1, \dots, q_p)$, $|q| = q_1 + \dots + q_p$,

$\frac{\partial^{-1} u}{\partial t^{-1}} \equiv \int_0^t u(\tau, x) d\tau$, функція $F(t, x, u)$ неперервна за t і досить гладка за змін-

ними x , u в області $G = \{(t, x, z) : (t, x) \in Q, |z| \leq r\}$. Вигляд області Q накладає умови 2π -періодичності за змінною x на функції $u(t, x)$, $f(t, x)$, $F(t, x, u(t, x))$.

Розглянемо спочатку незбурену задачу (1), (2) (коли $\varepsilon = 0$). Її розв'язок $u_0(t, x)$ шукаємо у вигляді ряду $u_0(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x)$. Тоді кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком відповідно такої крайової задачі:

$$\prod_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} + \gamma_j(k) \right) u_k(t) = f_k(t), \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{|q|=0}^{n-j} c_{jq}^l i^{|q|} k_1^{q_1} \dots k_p^{q_p} \times$$

$$\times \left(u_k^{(j)}(0) + \omega u_k^{(j-1)}(0) - \mu u_k^{(j)}(T) - \omega u_k^{(j-1)}(T) \right) = 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (4)$$

де $f_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функції $f(t, x)$, $\gamma_j(k) = i \sum_{s=1}^p a_{js} k_s + b_j$.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку незбуреної задачі (1), (2) у класі $C^n(\bar{Q})$ необхідно і досить, щоб для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$

$$\gamma_j(k) \cdot (1 - \mu \exp(\gamma_j(k)T)) + \omega \cdot (1 - \exp(\gamma_j(k)T)) \neq 0, \quad j=1, \dots, n. \quad (5)$$

За виконання умов (5) (для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$) збурена задача (1), (2) ($\varepsilon \neq 0$) рівнозначна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \varepsilon \int_Q K(t, x, \tau, \xi) F(\tau, \xi, u(\tau, \xi)) d\tau d\xi,$$

за умови, що ряд

$$\sum_{|k| \geq 0} G_k(t, \tau) \exp(ik(x - \xi)) \quad (6)$$

рівномірно збігається в області $Q \times Q$ до функції (ядра) $K(t, x, \tau, \xi)$ ($G_k(t, \tau)$ – функція Гріна задачі (4), (5), $k \in \mathbb{Z}^p$).

Якщо $|\mu| = 1$, то збіжність ряду (6) пов'язана з проблемою малих знаменників, бо вирази

$$M_j(k) \equiv \gamma_j(k) (1 - \mu \exp(\gamma_j(k)T)) + \omega (1 - \exp(\gamma_j(k)T)), \quad j=1, \dots, n,$$

які входять знаменниками у формулу (6), можуть як завгодно малими для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$. Якщо $|\mu| \neq 1$, то $|M_j(k)| \geq c > 0$.

Теорема 2. Нехай $n \geq 3$, $|\mu| = 1$ і для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ справджуються умови (5). Якщо $f \in C^{(0,4)}(\bar{Q})$, $F \in C^{(0,5)}(\bar{G})$, то для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел T , a_{js} , b_j і для всіх достатньо малих значень $|\varepsilon|$, $\varepsilon = \varepsilon(n, p, T, \omega, \mu)$, існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з класу $C^n(\bar{Q})$, який неперервно залежить від функції $f(t, x)$.

У роботі використано методи та деякі результати з [1,2].

Література:

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
2. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь// Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49, № 2. – С. 186 – 195.