ПРО ЗАДАЧУ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СЛАБКОНЕЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Гой Т.П, Власій О.Д.

Прикарпатський університет ім. В.Стефаника, м. Івано-Франківськ

В області $Q = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in (0,b)\}$ розглянемо задачу

$$P(\partial/\partial t, L)u(t,x) \equiv \sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2s}}{\partial t^{2s}} L^{n-s} u(t,x) = \Phi(t,x) + \varepsilon f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

$$M_q(\partial/\partial t, L)u(t,x) \equiv \sum_{\substack{j+2s\le 2n \\ j<2n}} b_{js}^q L^s \left(\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=T} \right) = 0, \ q = 1,\dots,2n, \tag{2}$$

$$L^r u(t,0) = L^r u(t,b) = 0, \ r = 0,1,\dots,n-1, \tag{3}$$

де $a_s \in \mathbf{R}$ $(a_0 \ne 0, a_n = 1)$, $b_{js}^q \in \mathbf{C}$, $\varepsilon, \mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; $L \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)$, $p(x) > 0$, $q(x) \ge 0$; оператор P – строго гіперболічний за Петровським в області Q. Функція $f(t,x,u)$ визначена і неперервна за змінною t і має обмежені похідні за x, u до четвертого порядку включно в області $D = \{(t,x,u) : (t,x) \in Q, u \in S(u_0, r)\}$, де $S(u_0,r) = \left\{u(t,x) \in C^{2n}(\overline{Q}), \|u - u_0\|_{C^{2n}(\overline{Q})} \le r\right\}$, $u_0 = u_0(t,x)$ – розв'язок незбуреної задачі (1)-(3) (якщо $\varepsilon = 0$); $\Phi(t,x) \in C^{(0,3)}(\overline{Q})$.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x)$, де $X_k(x), k \in \mathbf{N}$, – власні функції задачі Штурма-Ліувілля $LX = \lambda X$, $X(0) = X(b) = 0$ ($\lambda_k \in \mathbf{R}_+$, $k \in \mathbf{N}$, – відповідні власні значення).

Якщо $n \ge 2$, то задачу (1)-(3) можна звести до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t,x) = u_0(t,x) + \varepsilon \int_Q K(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\, d\tau\, d\xi, \tag{4}$$

де $K(t,x,\tau,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t,\tau) X_k(x) X_k(\xi)$, а $G_k(t,\tau)$ – функції Ґріна задач

$$P(d/dt, \lambda_k) u_k(t) = 0, \ M_q(d/dt, \lambda_k) u_k(t) = 0, \ q = 0,1,\dots,2n, k \in \mathbf{Z}.$$

За умов єдиності розв'язку незбуреної задачі (1)-(3) $\left(\arg\mu \pm \sqrt{\lambda_k}\,\eta_j T \ne 2\pi n, k, n \in \mathbf{Z}\right.$, де η_j, $j = 1,\dots,n$, – додатні корені рівняння $\left.\sum_{s=0}^{n} a_s \eta^{2s} = 0\right)$ доведено, що для досить малих $|\varepsilon|$, $\varepsilon = \varepsilon(r,n,T,\mu,\eta_1,\dots,\eta_n)$, рівняння (4) має єдиний класичний розв'язок в кулі $S(u_0,r)$ для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbf{R}$) чисел $a_j T/\pi$, $j = 1,\dots,n$.