ГОЙ Т.П.

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ФАКТОРИЗОВАНОГО ОПЕРАТОРА ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЗБУРЕНОГО НЕЛІНІЙНИМ ДОДАНКОМ

Досліджена задача з нелокальними двоточковими умовами за часовою координатою та умовами періодичності за просторовою змінною для слабконелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами у лінійній частині оператора. Для майже всіх (відносно міри Лебега) параметрів задачі встановлено умови існування єдиного класичного розв'язку задачі.

GOY T.P.

NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR HYPERBOLIC FACTORABLE OPERATOR WITH CONSTANT COEFFICIENTS, PERTURBED A NONLINEAR SUMMAND

We study problem for weakly nonlinear hyperbolic high-order equations with constant coefficients in linear part of the operator with nonlocal two-point conditions in time and periodic conditions in spase variables. For almost all (with respect to Lebesque measure) parametrs of the problem we establish conditions for the existence of a unique classical solution of the problem.

1. Задачі з нелокальними крайовими умовами за часовою координатою для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь почали досліджуватись порівняно недавно (див., наприклад [1-12] і бібліографію в них). Однією з причин цього були, очевидно, труднощі, пов'язані з малими знаменниками, що виникають при дослідженні таких задач. Вказані задачі для нелінійних гіперболічних рівнянь вивчались, головним чином, для рівнянь і систем рівнянь першого та другого порядків [1,2,4,5,7-9].

У цій статті, яка є розвитком робіт [10-12], досліджена задача з нелокальними двоточковими учмовами за часом для слабконелінійних нестрого гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в головній частині оператора у класі 2π-періодичних за просторовою змінною функцій.

2. В області $B=\{(t,x): t\in(0,T), x\in Q\}$, де Q – коло одиничного радіуса, розглядаємо задачу

$$\mathcal{P}u(t,x)\equiv\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_j\frac{\partial}{\partial x}-b_j\right)u(t,x)=\varepsilon f(t,x,u(t,x)), \tag{1}$$

$$\sum_{\substack{j+s\le n\\ j<n}} d_{ljs}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s\left(\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=0}-\mu\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j}\right|_{t=T}\right)=0,\quad l=1,\dots,n, \tag{2}$$

де

$$a_j\in\mathbf{R},\ j=1,\dots,n,\ d_{ljs}\in\mathbf{C},\ l=1,\dots,n,\ j+s\le n,\ j<n,\quad \varepsilon,\mu\in\mathbf{C}\backslash\{0\},$$
$$b_j\in\mathbf{C},\ \operatorname{Re} b_j\ne \operatorname{Re} b_l,\quad j,l=1,\dots,n,\ j\ne l. \tag{3}$$

Вигляд області B накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції $u(t,x)$ та $f(t,x,u(t,x))$. Припустимо, що функція $f(t,x,z)$ визначена, неперервна за t і досить гладка за змінними x,z в області $B_1=\{(t,x,z): (t,x)\in B, |z|\le r<\infty\}$.

3. Розглянемо спочатку лінійну задачу з умовами (2) для рівняння

$$\mathcal{P}u(t,x)=0. \tag{1$'$}$$

Її розв'язок зображається у вигляді ряду

$$u^0(t,x)=\sum_{|k|\ge 0}u_k^0(t)\exp(ikx). \tag{4}$$

Кожна з функцій $u_k^0(t), k\in\mathbf{Z}$, є розв‘язком відповідної задачі з нелокальними умовами для звичайного диференціального рівняння:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(d/dt-\gamma_j(k)\right)u_k(t)=0, \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{j+s\le n\\ j<n}} d_{ljs}(ik)^s\left(u_k^{(j)}(0)-\mu u_k^{(j)}(T)\right)=0,\quad l=1,\dots,n, \tag{6}$$

де

$$\gamma_j(k) = \operatorname{Re} b_j + i(a_j k + \operatorname{Im} b_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Рівняння (5) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$u_{kj}(t) = \exp(\gamma_j(k)t), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

а характеристичний визначник $\Delta(k)$ задачі (5),(6) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = D(k)\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \mu \exp(\gamma_j(k)T)\right)\prod_{1\le p<q\le n}\left(\gamma_q(k) - \gamma_p(k)\right), \tag{9}$$

де

$$D(k) = \det\left\| \sum_{s=0}^{n+1-j} d_{l,j-1,s}(ik)^s \right\|_{l,j=1}^{n}. \tag{10}$$

Із формул (7),(9),(10) та умови 3 випливає, що $\Delta(k)\neq 0$ тоді і тільки тоді, коли для всіх $k\in\mathbf{Z}$ виконуються умови:

$$1 - \mu \exp(\gamma_j(k)T) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n; \qquad D(k) \neq 0. \tag{11}$$

Позначимо через W оператор, породжений задачею (1′),(2). Надалі вважатимемо, що для всіх $k\in\mathbf{Z}$ умови (11) виконуються. Тоді існує обернений до W оператор W^{-1}, який визначається формулою

$$W^{-1}v(t,x) = \frac{|\varepsilon|}{2\pi}\sum_{|k|\ge 0}\int_0^T G_k(t,\tau)\left(\int_0^{2\pi} v(\tau,\xi)\exp(-ik\xi)d\xi\right)d\tau \exp(ikx),$$

де $v(t,x)$ – 2π-періодична за змінною x функція з простору $C(\overline{B})$, а $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbf{Z}$, – функція Ґріна відповідної задачі (5),(6).

Припустимо, що ряд

$$(2\pi)^{-1}\sum_{|k|\ge 0} G_k(t,\tau)\exp(ik(x-\xi)) \tag{12}$$

рівномірно збігається в області $\overline{B}\times\overline{B}$ і позначимо через $K(t,x,\tau,\xi)$ його суму. Тоді

$$W^{-1}v(t,x)=\varepsilon\int_B K(t,x,\tau,\xi)v(\tau,\xi)d\tau d\xi$$

і задача (1),(2) зводиться до еквівалентного їй нелінійного інтегрального рівняння

$$u(t,x)=\varepsilon\int_B K(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi. \tag{13}$$

У квадраті K_T, за винятком сторін τ=0 і τ=T, функції $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbf{Z}$, визначаються формулами

$$G_k(t,\tau)=2^{-1}\sum_{j=1}^{n}\exp\left(\gamma_j(k)(t-\tau)\right)\prod_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{n}\left(\gamma_j(k)-\gamma_s(k)\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(\operatorname{sgn}(t-\tau)+\frac{1+\mu\exp\left(\gamma_j(k)T\right)}{1-\mu\exp\left(\gamma_j(k)T\right)}\right),\quad k\in\mathbf{Z}. \tag{14}$$

На стороні τ=0 (τ=T) квадрата K_T кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbf{Z}$, доозначується за неперервністю справа (зліва).

4. Збіжність ряду (12), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, бо відмінні від нуля вирази

$$1-\mu\exp(\gamma_j(k)T),\ j=1,...,n,$$

що входять знаменниками у формулу (14) можуть бути як завгодно малими за модулем для нескінченного числа $k\in\mathbf{Z}$.

Якщо

$$\ln|\mu|+\operatorname{Re}b_jT\neq 0,\quad j=1,...,n, \tag{15}$$

то малі знаменники відсутні, бо

$$\begin{gathered}(\forall k\in\mathbf{Z})\qquad \left|1-\mu\exp(\gamma_j(k)T)\right|\geq\\ \geq\left|1-|\mu|\exp(\operatorname{Re}b_jT)\right|\equiv C_j>0,\qquad j=1,\dots,n.\end{gathered} \tag{16}$$

Якщо ж для деякого $j=j_0$, $1\leq j_0\leq n$,

$$\ln|\mu|+\operatorname{Re}b_{j_0}T=0, \tag{17}$$

то на основі формули (14) та оцінок (16) одержуємо

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{\partial^l}{\partial t^l}\int_0^T G_k(t,\tau)d\tau\right| \le$$

$$\le \begin{cases} H_1\left(1+|k|\right)^l+\delta_{nq}, & \ln|\mu|+\mathrm{Re}\, b_j T\ne 0,\ j=1,\ldots,n, \\ \left(1+|k|\right)^l\left(H_2+\dfrac{H_3}{\left|1-\exp\left(i(a_{j_0}k+\mathrm{Im}\, b_{j_0})T\right)\right|}\right)+\delta_{nq}, & \ln|\mu|+\mathrm{Re}\, b_{j_0}T=0, \end{cases} \tag{18}$$

де l=0,1,…,n, $k\in\mathbf{Z}$, δ_{nl} – символ Кронекера,

$$H_1=T\sum_{j=1}^{n}V(j)C_j^{-1}\left(1+|\mu|\exp(\mathrm{Re}\, b_j T)\right),$$

$$H_2=T\sum_{j=1}^{n}{}' V(j)C_j^{-1}\left(1+|\mu|\exp(\mathrm{Re}\, b_j T)\right),$$

$$H_3=2TV(j_0),$$

$$V(q)=\alpha_q\exp\left(|\mathrm{Re}\, b_q|T\right)\prod_{\substack{s=1\\ s\ne q}}^{n}\left|\gamma_s(k)-\gamma_q(k)\right|^{-1},\quad q=1,\ldots,n,$$

$$\alpha_q=\max\left(|b_q|^2, a_q^2, |a_q||\mathrm{Im}\, b_q|\right),\qquad q=1,\ldots,n,$$

а штрих при сумі означає, що пропущено підсумовування по $j=j_0$.

Ми вважаємо, що оператор *P* нестрого гіперболічний за Петровським, тобто, що деякі з коефіцієнтів a_j, j=1,…,n, можуть співпадати. Позначимо через φ_j кратність характеристики a_j оператора *P*, j=1,…,n; $\omega=\max\limits_{j=1,\ldots n}\{\varphi_j\}$.

З формули (7) знаходимо наступні оцінки

$$\prod_{\substack{s=1\\ s\ne j}}^{n}\left|\gamma_j(k)-\gamma_s(k)\right|^{-1}\le\begin{cases}\tilde{C}F_j^{1-\varphi_j}|k|^{-n+\varphi_j}, & k\ne 0,\\ F_j^{1-n}, & k=0,\end{cases}\qquad j=1,\ldots,n, \tag{19}$$

де

$$F_j=\min_{\substack{s=1,\ldots,n\\ s\ne j}}|b_j-b_s|,\quad j=1,\ldots,n,\quad \tilde{C}=\tilde{C}\left(\mathrm{Im}\, b_j, a_j, \varphi_j\right).$$

Якщо виконується умова (17), то збіжність ряду (12) пов'язана з проблемою малих знаменників. З наступної леми, доведення якої проводиться за схемою доведення леми з [11], та оцінок (18) випливає, що малі знаменники лише незначною мірою погіршують збіжність ряду (12).

Лема. Нехай виконується умова (17). Тоді для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел $a_{j_0}, 1 \le j_0 \le n$, ряд

$$\sum_{|k|>0} \frac{1}{|k|^{n-\omega} \left|1-\exp\left(i(a_{j_0}k + \operatorname{Im} b_{j_0})T\right)\right|}$$

збігається, якщо $n-\omega \ge 2$.

5. Розглянемо питання про існування розв'язку інтегрального рівняння (13) з простору $C^n(\overline{B})$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 5.2. Нехай $n-\omega \ge 2$, функція $f(t,x,z)$ неперервна за t і має обмежені похідні за змінними x,z до порядку $\omega+3$ включно в області B_1. Тоді, якщо виконується умова (17), то для майже всіх (відносно міри Лебега в **R**) чисел $a_{j_0}, 1 \le j_0 \le n$, і для всіх ε, $\varepsilon|<\varepsilon_1$, а якщо виконуються нерівності (15), то для довільних фіксованих a_j, $j=1,\ldots,n$, і для всіх ε, $|\varepsilon|<\varepsilon_2$, існує єдиний розв'язок інтегрального рівняння (13), який належить кулі $\overline{S}(r) \subset C^n(\overline{B})$, де

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{r}{\Phi_1(1+r)}, \frac{1}{\Phi_1(2+r)}\right),$$

$$\varepsilon_2 = \min\left(\frac{r}{\Phi_2(1+r)}, \frac{1}{\Phi_2(2+r)}\right),$$

$$\Phi_1(y) = 2^n \tilde{f} T\rho(n+2)(n+1)(1+|\mu|\exp(\sigma T))(1+y)^{2+\omega} \times$$

$$\times\left(1+\exp(\sigma T)\sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_j^{1-n}\left(|\sin(\operatorname{Im} b_{j_0} T)|^{-1} + F_j^{n-\varphi_j}\right)\right),$$

$$\Phi_2(y) = 2^{n-1} \tilde{f} T(n+2)(n+1)(1+|\mu|\exp(\sigma T))(1+y)^{2+\omega} \times$$

$$\times\left(2+\exp(\sigma T)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j C_j^{-1}F_j^{1-n}(1+\tilde{C}F_j^{n-\varphi_j})\right),$$

$$\overline{S}(r)=\left\{u\in C^n(\overline{B}):\ \|u\|_{C^n(\overline{B})}\le r\right\},$$

$$\alpha_q=\sum\nolimits_{|k|>0}|k|^{-q},\ q>1,$$

$$\sigma=\max_{j=1,\dots,n}|\operatorname{Re}b_j|,\qquad \rho=\max_{\substack{j=1,\dots,n\\ j\ne j_0}}\left(1,C_j^{-1}\right),$$

$$\tilde{f}=\max_{0\le|s|\le\omega+3}\max_{B_1}\left|\partial^{s_1+s_2}f(t,x,z)\Big/\partial x^{s_1}\partial z^{s_2}\right|.$$

Доведення теореми проведемо для випадку, коли виконується умова (17). Рівняння (13) запишемо у вигляді

$$u(t,x)=\mathcal{A}u(t,x), \tag{20}$$

де $\mathcal{A}$ – нелінійний інтегральний оператор

$$\mathcal{A}u(t,x)=\varepsilon\int_B K(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))d\tau d\xi, \tag{21}$$

визначений у кулі $\overline{S}(r)$, і покажемо, що для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $a_{j_0}, 1\le j_0\le n$, оператор $\mathcal{A}$ переводить кулю $\overline{S}(r)$ у себе.

Якщо функція u(t,x) зображається рядом вигляду (5) та належить кулі $\overline{S}(r)$, справедливі оцінки

$$\max_{0\le t\le T}\left|f_k(t,\{u_m(t)\})\right|\le|k|^{-\beta}\max_{\overline{B}}\left|\frac{\partial^\beta f(t,x,u(t,x))}{\partial x^\beta}\right|,\quad \beta=0,1,\dots,\omega+2, \tag{22}$$

де

$$\left|f_k(t,\{u_m(t)\})\right|=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}f\left(t,x,\sum\nolimits_{|m|\ge0}u_m(t)\exp(imx)\right)\exp(-ikx)dx,\ k,m\in\mathbf{Z}.$$

Користуючись правилом диференціювання складної функції, знаходимо

$$\max_{\overline{B}}\left|\frac{\partial^\beta f(t,x,u(t,x))}{\partial x^\beta}\right|\le\tilde{f}\left(1+\|u\|_{C^n(\overline{B})}\right)^\beta\le\tilde{f}(1+r)^\beta,\quad \beta=0,1,\dots,\omega+2. \tag{23}$$

На підставі формули (20), враховуючи оцінки (18),(22) та (23), одержуємо

$$\|Au(t,x)\|_{C^n(\overline{B})} \le$$

$$\le |\varepsilon|(2\pi)^{-1}\sum_{|k|\ge 0}\sum_{j+s\le n}\max_{(t,x)\in\overline{B}}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j \partial x^s}\int_0^T G_k(t,\tau)\int_0^{2\pi} f(\tau,\xi,u(\tau,\xi))\exp(ik(x-\xi))d\tau d\xi\right| \le$$

$$\le |\varepsilon|\sum_{|k|>0}\sum_{j+s\le n}\max_{(t,x)\in\overline{B}}\left|\frac{\partial^{j+s}}{\partial t^j \partial x^s}\int_0^T G_k(t,\tau) f_k\left(\tau,\{u_m(\tau)\}\right)d\tau\exp(ikx)\right| \le$$

$$\le 2^n \tilde{f} T\rho(n+2)(n+1)\left(1+|\mu|\exp(\sigma T)\right)(1+r)^{\omega+2}\times$$

$$\times\left(1+\exp(\sigma T)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j F_j^{1-n}\left(\left|\sin(\operatorname{Im} b_{j_0} T)\right|^{-1}+F_j^{n-\varphi_j}\right)\right)\le|\varepsilon|\Phi_1(1+r)<r.$$

Покажемо тепер, що оператор A для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $a_{j_0}, 1\le j_0\le n$, є оператором стиску. Нехай $u_1, u_2\in\overline{S}(r)$. Із формули (21), враховуючи лему, оцінки (14),(15),(32) та формулу Лагранжа про скінчені прирости, одержуємо, що для майже кожного числа $a_{j_0}, 1\le j_0\le n$, справджується оцінка

$$\|Au_1 - Au_2\|_{C^n(\overline{B})} \le |\xi|(2\pi)^{-1}\times$$

$$\times\left\|\int_B \sum_{|k|\ge 0} G_k(t,\tau)\left(f(\tau,\xi,u_1(\tau,\xi)) - f(\tau,\xi,u_2(\tau,\xi))\right)\exp(i(x-\xi))d\tau d\xi\right\|_{C^n(\overline{B})} \le$$

$$\le |\varepsilon|\tilde{f}\|u_2-u_1\|_{C^n(\overline{B})}\times$$

$$\times 2^n \tilde{f} T\rho(n+2)(n+1)(1+|\mu|\exp(\sigma T))(2+r)^{\omega+2}\times$$

$$\times\left(1+\exp(\sigma T)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j F_j^{1-n}\left(|\sin(\operatorname{Im} b_{j_0} T)|^{-1}+F_j^{n-\varphi_j}\right)\right)\le$$

$$\le |\varepsilon|\Phi_1(2+r)\|u_2-u_1\|_{C^n(\overline{B})}.$$

Отже, якщо $|\varepsilon|\Phi_1(2+r)<1$, то оператор A, визначений формулою (23), є оператором стиску для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел $a_{j_0}, 1\le j_0\le n$.

Таким чином, інтегральне рівняння (13), а отже, і задача (1),(2) має єдиний розв'язок. У випадку, коли виконуються нерівності (15), доведення теореми проводиться за тією ж схемою. Теорему доведено.

Зауваження. Розв'язок задачі (1),(2) можна шукати як границю послідовності $\{u_s(t,x)\}$, де u_0 – довільна функція з кулі $\overline{S}(r)$,

$$u_{s+1}(t,x)=\mathcal{A}u_s(t,x),\ s\in\mathbf{N},$$

$\mathcal{A}$ – інтегральний оператор, визначений формулою (23).

1. Артемьев Н.А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных// Изв. АН СССР. Сер. мат.-1937.-№1.-С.15-50.
2. Vejvoda O., Harrmann L., Lovicar V. et al. Partial differential equations: Time-periodic solutions// Alphen aan den Rijn.-Sijthoff: Noordhoff.-1981.-358+XIIIp.
3. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.-Киев: Наук. думка, 1984.- 264 с.
4. Sinestrari Eugenio, Webb G.F. Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions// J. Math. Anal. and Appl.-1987.-V.121,№2.-P.449-464.
5. Плотников П.И., Юнгерман Л.Н. Периодические решения слабонелинейного волнового уравнения с иррациональным отношением периода к длине интервала// Дифференц. уравнения.-1988.-Т.24,№9.-С.1599-1607.
6. Маринец В.В. О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями// Дифференц. уравнения.-1988.-Т.24,№8.-С.1393-1397.
7. Митропольский Ю.А., Урманчева Л.Б. О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений// Укр. мат. журн.-1990.-Т.42,№2.-С.1657-1663.

8. Byszewski L. Existence and uniqueness of solutions of nonlocal problems for hyperbolic equation $u_{xt}=F(x,t,u,u_x)$// J. Appl. Math. and Stochastic Anal.-1990.-V.3,№3.-P.163-168.
9. Кміть І.Я. Про одну нелокальну задачу для квазілінійної гіперболічної системи першого порядку з двома незалежними змінними// Укр. мат. журн.-1993.-Т.45,№9.-С.1307-1313.
10. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами// Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения.–Киев: Ин-т математики НАН Украины.-1996.-С.74-76.
11. Гой Т.П., Пташник Б.Й. Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь// Укр. мат. журн.-1997.-Т.49,№2.-С.186-195.
12. Гой Т.П. Задача з нелокальними двоточковими умовами для слабко нелінійних рівнянь// Волин. матем. вісн.-1997.-Вип.4.-С.42-45.