УДК: 517.946

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

ON A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE CLASS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A CYLINDRICAL DOMAIN

Власий О.Д.[1], **к.ф.-м.н.**, **Гой Т.П.** [1], **к.ф.-м.н.**, **Савка И.Я.** [1,2], **к.ф.-м.н.**

Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, г. Ивано-Франковск, Украина

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, г. Львов, Украина

vlasij@ukr.net, tarasgoy@yahoo.com, s-i@ukr.net

Аннотация. На основании метрического подхода исследован вопрос о классической корректности задачи с нелокальными условиями для факторизированных уравнений с частными производными высокого порядка с переменными коэффициентами в цилиндрической области.

Annotation. By using the metric approach we study classical well-posedness of nonlocal boundary value problem for high-order factorized partial differential equations with variable coefficients in cylindrical domain.

Ключевые слова: некорректная краевая задача, нелокальные краевые условия, малые знаменатели.

Keywords: incorrect boundary value problem, nonlocal boundary conditions, small denominators.

Задачи с нелокальными условиями по временной переменной для уравнений в частных производных, вообще говоря, некорректны по Адамару. Единственность решений таких задач во многих случаях зависит от диофантовых свойств коэффициентов и параметров задачи, а разрешимость и гладкость решений связаны с проблемой малых знаменателей [1].

В настоящей работе установлена однозначная разрешимость краевой задачи с нелокальными условиями второго рода по времени и условиями типа условий Дирихле по пространственным переменными для факторизированного уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами в цилиндрической области с достаточно гладкой границей.

Постановка задачи. В области $Q=\{(t,x): t\in(0,T),\, x\in G\}$, где $G\in\mathbf{R}^p$ — ограниченная область с достаточно гладкою границей Γ, исследуем задачу

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right)[u] \equiv \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_j L - b_j\right) u(t,x) = 0, \tag{1}$$

$$B_s\left(\frac{\partial}{\partial t}, L\right)[u] \equiv \sum_{\substack{0\le j\le n-1\\ 0\le q\le n-j}} c_{qj}^s L^q\left(\mu_1 \left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0} + \mu_2 \left.\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} + \mu_3 \left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=T} - \mu_2 \left.\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T}\right) = \varphi_s(x), \quad s = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$L^j u(t,x)\big|_{\Gamma} = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \tag{3}$$

где $a_j, b_j \in \mathbf{C}$, $|a_m - a_l| + |b_m - b_l| \ne 0\ (m \ne l)$, $c_{qj}^s, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbf{C}, \mu_2 \ne 0$, $\varphi_s \in L_2(G)$. Оператор $L \equiv \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) - q(x)$ — эллиптический в области G, $p_{ij}(x) > 0$, $q(x) \ge 0$, $L^0 u = u$, $L^q u = L(L^{q-1}u)$. Каждое условие (2) содержит интеграл $u_t^{(-1)} \equiv \int_0^t u(t,\tau)d\tau$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ и $\{X_k(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$ — системы собственных значений и собственных функций спектральной задачи $LX(x) = -\lambda X(x)$, $X(x)\big|_{\Gamma} = 0$. При некоторых дополнительных предположениях на область G и коэффициенты оператора L система $\{X_k(x)\}_{k\in\mathbf{N}}$ — полная и ортонормированная в $L_2(G)$, а собственные значения λ_k — различные и положительные. [2]

Условия единственности решения. Решение задачи (1)–(3) ищем в виде ряда $u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x)$. Тогда каждая из функций $u_k(t)$ является решением нелокальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$P(d/dt, -\lambda_k)[u_k] = 0, \quad B_s(d/dt, -\lambda_k)[u_k] = \varphi_{sk}, \quad s = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\varphi_{sk} = \int_G \varphi_s(x) X_k(x) dx$, $s = \overline{1,n}$.

Характеристический определитель задачи (4) имеет вид

$$\Delta(\lambda_k) = \det\left\| B_s[e^{(a_j\lambda_k + b_j)t}]\right\|_{s,j=\overline{1,n}} = D(\lambda_k)\prod_{j=1}^{n} M_j(\lambda_k) \prod_{1\le p<q\le n}\big((a_q - a_p)\lambda_k + b_q - b_p\big),$$

где $D(\lambda_k) = \det\left\|\sum_{q=0}^{n+1-m} c_{q,m-1}^s(-\lambda_k)^q\right\|_{s,m=\overline{1,n}}$; $M_j(\lambda_k) = \mu_1 + \mu_3 e^{(a_j\lambda_k + b_j)T} + \mu_2(a_j\lambda_k + b_j)^{-1}(1 - e^{(a_j\lambda_k + b_j)T})$, если $a_j\lambda_k + b_j \ne 0$, и $M_j(\lambda_k) = \mu_1 + \mu_3 - \mu_2 T$, если $a_j\lambda_k + b_j = 0$.

Определим функциональные пространства

$$B_q = \left\{\varphi \in L_2(G) : \varphi(x) = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{N}} \varphi_k X_k(x),\ \|\varphi\|_{B_q}^2 = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{N}} \lambda_k^{2q}|\varphi_k|^2 < \infty\right\}, \quad q \ge 0;$$

$$C^n([0,T], B_q) = \left\{u(t,x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} u_k(t) X_k(x) : \|u\|_{C^n([0,T],B_q)} = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|u_t^{(j)}(t,\cdot)\right\|_{B_{q-j}}\right\}.$$

Теорема 1. *Для единственности решения задачи* (1)–(3) *в пространстве* $C^n([0,T], B_q)$ *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $\lambda_k \in \Lambda$

$$D(\lambda_k) \neq 0, \qquad M_j(\lambda_k) \neq 0, \;\; j = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Условия существования решения. Пусть выполняются условия (5). Тогда решение задачи (1)-(3) представляется формальным рядом

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(-1)^{s+j}\Delta_{sj}(\lambda_k)\Delta^{-1}(\lambda_k)\varphi_{sk}e^{(a_j\lambda_k+b_j)t}X_k(x), \tag{6}$$

где $\Delta_{sj}(\lambda_k)$ — определитель, получаемый из $\Delta(\lambda_k)$ вычеркиванием s-го рядка и j-го столбца.

В знаменатели формулы (6) входят выражения $M_j(\lambda_k),\ j = \overline{1,n}$, которые будучи отличными от нуля, могут принимать как угодно малые значения для бесконечного множества чисел $\lambda_k \in \Lambda$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (5) *и существуют такие постоянные* $C_1 > 0$ *и* $\alpha \in \mathbf{R}$, *что для всех* (*кроме конечного числа* $\lambda_k \in \Lambda$)

$$|M_j(\lambda_k)| \geq C_1 |\lambda_k|^{-\alpha} \max\left\{1, e^{T\operatorname{Re}(a_j\lambda_k+b_j)}\right\}, \quad j = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Если $\varphi_s \in B_{q+n+\alpha-s},\ s = \overline{1,n},$ *то существует единственное решение* $u \in C^n([0,T], B_q)$ *задачи* (1)-(3), *непрерывно зависящее от функций* $\varphi_s(x),\ s = \overline{1,n}$.

Выполнение неравенства (7) для каждого фиксированного $j \in \{1,\dots,n\}$ доказано для таких случаев:

$$1)\ \operatorname{Re}a_j \neq 0; \quad 2)\ \operatorname{Re}a_j = 0, \quad \operatorname{Re}b_j = 0, \quad (z,h) \notin \Omega_0^j,$$

$$3)\ \operatorname{Re}a_j = 0, \quad \operatorname{Re}b_j \neq 0, \quad (z,h) \notin \Omega_0^j \cap \Omega_1^j \cap \Omega_2^j,$$

где $z = \mu_1/\mu_2,\ h = \mu_3/\mu_2,\quad \Omega_0^j = \left\{(z,h) \in \mathbf{C}^2 : |z| = |h| e^{T\operatorname{Re}b_j},\ \operatorname{Im}(z + he^{2T\operatorname{Re}b_j}) = 0\right\}$,

$$\Omega_1^j = \left\{(z,h) \in \mathbf{C}^2 : \operatorname{Re}^2 b_j(|z|^2 - |h|^2)e^{2T\operatorname{Re}b_j} + 2\operatorname{Re}b_j \cdot \operatorname{Re}(z + he^{2T\operatorname{Re}b_j}) + 1 = e^{2T\operatorname{Re}b_j}\right\},$$

$$\Omega_2^j = \left\{(z,h) \in \mathbf{C}^2 : |1 - e^{T\operatorname{Re}b_j}|\,|2\operatorname{Re}b_j|^{-1}e^{-T\operatorname{Re}b_j} \leq |h| \leq (1 + e^{T\operatorname{Re}b_j})|2\operatorname{Re}b_j|^{-1}e^{-T\operatorname{Re}b_j}\right\}.$$

Для всех других случаев с помощью метрического подхода установлено выполнение оценок (7) для почти всех (относительно мери Лебега) чисел $T > 0$.

Список литературы

1. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

2. Ильин, В.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных / В.А. Ильин, И.А. Шишмарев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – Т. 24. – С. 883–896.