ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.687 № 687, (2010) с. 82–90

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.687 No 687, (2010) 82–90

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З МІРАМИ НА ПІВОСІ

О.В. Махней

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57, Україна

(Отримано 11 травня 2010 р.)

За допомогою концепції квазіпохідних побудовано асимптотичні формули для фундаментальної системи розв'язків диференціального рівняння n-го порядку з мірами на півосі $[0,\infty)$.

Ключові слова: диференціальне рівняння, узагальнені функції, міри, асимптотика розв'язків, піввісь, квазіпохідні.

2000 MSC: 34E05

УДК: 517.926.4

Вступ

Лінійні диференціальні оператори, породжені диференціальними виразами з гладкими коефіцієнтами (зокрема асимптотику власних значень і власних функцій), вивчено досить добре (див., наприклад, [1]). Останнім часом з'явилось чимало результатів, які тою чи іншою мірою узагальнюють ці оператори. Зокрема, в праці [2] узагальнення здійснюється в напрямку розгляду нестандартних крайових умов. У роботах київських математиків [3, 4] отримано цікаві результати для функціонально-диференціальних рівнянь вигляду $y^{(n)}+Fy+\rho^n y=0$, де F – лінійний оператор, що діє з простору Гельдера $C^\gamma[0,1]$ у простір $L_1[0,1]$, причому $\gamma<n-1$. Роботи [5, 6, 7], як і ця стаття, спрямовані на пом'якшення вимог на коефіцієнти диференціальних виразів. Численну бібліографію для диференціальних операторів з сингулярностями можна знайти в [8].

У задачах прикладного характеру часто зустрічаються узагальнені функції в коефіцієнтах відповідних диференціальних виразів. У зв'язку з бурхливим розвитком теорії узагальнених функцій стає можливим проведення узагальнень деяких відомих результатів за допомогою введення квазіпохідних.

Напевно першим, хто застосовував для досліджень апарат квазіпохідних, який дозволив відмовитись від вимоги гладкості коефіцієнтів, був Д. Шин, [9, 10]. Спочатку він і його послідовники вивчали лише диференціальні оператори з неперервними чи сумовними коефіцієнтами. Однак, останнім часом з'явились спроби застосувати цей метод до дослідження диференціальних виразів з узагальненими функціями в коефіцієнтах.

I. Постановка задачі

Розглянемо диференціальний вираз

$$l_n(y)\equiv y^{(n)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y, \qquad (1)$$

де $p_i=q_i'$, $q_i\in BV^+[0,\infty)$, $i=\overline{2,n}$. Тут $BV^+[0,\infty)$ – простір неперервних праворуч функцій обмеженої на $[0,\infty)$ варіації, а штрихом позначено узагальнене диференціювання. Отже, p_i – міри, тобто узагальнені функції нульового порядку [11]. Розглянемо також відповідне диференціальному виразу (1) рівняння

$$l_n(y)=\lambda y. \qquad (2)$$

Відомо [12, 13], що розв'язок початкової задачі для рівняння (2) і всі його похідні до порядку $n-2$ включно є абсолютно неперервними функціями, а $(n-1)$-ша похідна на цьому проміжку є функцією обмеженої варіації.

Приймаючи $\lambda=-\rho^n$, рівняння (2) запишемо у вигляді

$$y^{(n)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny+\rho^n y=0. \qquad (3)$$

Розіб'ємо всю комплексну ρ-площину на $2n$ секторів S_q, $q=\overline{0,2n-1}$, які визначаються нерівністю

$$\frac{q\pi}{n}\le\arg\rho\le\frac{(q+1)\pi}{n}.$$

Області S_q позначатимемо через S.

Через $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ позначимо всі різні корені n-го степеня з числа -1. Має місце така властивість [1]: для кожного сектора S_q існує таке розміщення чисел $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$, що для всіх $\rho\in S_q$ виконуються нерівності

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1)\le\mathrm{Re}(\rho\omega_2)\le\ldots\le\mathrm{Re}(\rho\omega_n). \qquad (4)$$

У [14] встановлено асимптотику для великих значень параметра ρ лінійно незалежної системи розв'язків рівняння (3) з сумовними коефіцієнтами на півосі $[0,\infty)$. Виявляється, що сингулярність коефіцієнтів на неї не впливає і нижче буде знайдено аналогічні формули і для розв'язків рівняння (3) з накладеними на початку цього пункту умовами на коефіцієнти, що узагальнює окремі результати роботи [14].

II. Допоміжні теореми

Теорема 1. *Нехай для ядер $K_{ij}(x,\xi,\rho)$ і функцій $f_i(x,\rho)$, $b_j(x)$, $i,j=\overline{1,n}$ системи інтегральних рівнянь $(i=\overline{1,n})$*

$$u_i(x,\rho)=f_i(x,\rho)+\sum_{j=1}^{n}\int_a^{\infty}K_{ij}(x,\xi,\rho)u_j(\xi,\rho)db_j(\xi) \quad (5)$$

виконуються умови:

а) Для кожного значення ρ, яке належить деякій множині E комплексної ρ-площини, і кожного значення x з півінтервалу $[a,\infty)$, ядра $K_{ij}(x,\xi,\rho)$ є неперервними ліворуч сумовними функціями змінної ξ в півінтервалі $[a,\infty)$.

б) Функції $b_i(x)$ є неперервними праворуч функціями обмеженої на проміжку $[a,\infty)$ варіації.

в) Існує додатне число q, менше від одиниці, таке, що

$$\int_a^{\infty}|K_{ij}(x,\xi,\rho)|\cdot|db_j(\xi)|\le\frac{q}{n},\quad i,j=\overline{1,n}, \quad (6)$$

для всіх $x\in[a,\infty)$ і всіх $\rho\in E$.

г) Для всіх точок $x,x_0\in[a,\infty)$, всіх $\rho,\rho_0\in E$ і всіх $i,j=\overline{1,n}$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ \rho\to\rho_0}}\int_a^{\infty}|K_{ij}(x,\xi,\rho)-K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)|\cdot|db_j(\xi)|=0. \quad (7)$$

д) Функції $f_i(x,\rho)$ неперервні за сукупністю змінних x, ρ і обмежені на множині $x\in[a,\infty)$, $\rho\in E$.

Тоді система рівнянь (5) має розв'язок $u_i(x,\rho)$, $i=\overline{1,n}$, неперервний за сукупністю змінних x, ρ і обмежений на множині $a\le x<\infty$, $\rho\in E$.

Зокрема, якщо ядра $K_{ij}(x,\xi,\rho)$ задовольняють нерівності

$$|K_{ij}(x,\xi,\rho)|\le\frac{C}{|\rho|},\quad i,j=\overline{1,n},\quad x,\xi\in[a,\infty), \quad (8)$$

де C – деяка стала, то при $\rho\to\infty$

$$u_i(x,\rho)=f_i(x,\rho)+O\left(\frac{1}{\rho}\right),\quad i=\overline{1,n}. \quad (9)$$

□ *Доведення.* Доведення здійснюємо методом, запропонованим у [15]. Застосуємо до системи (5) метод послідовних наближень. Приймемо для $x\in[a,\infty)$, $\rho\in E$

$$u_{i0}(x,\rho)\equiv 0,\quad i=\overline{1,n}, \quad (10)$$

$$u_{i,k+1}(x,\rho)=f_i(x,\rho)+ +\sum_{j=1}^{n}\int_a^{\infty}K_{ij}(x,\xi,\rho)u_{jk}(\xi,\rho)db_j(\xi),\quad i=\overline{1,n}. \quad (11)$$

Позначимо через E_1 множину всіх пар (x,ρ), $a\le x<\infty$, $\rho\in E$ і доведемо за індукцією, що кожна з функцій $u_{ik}(x,\rho)$ неперервна за сукупністю змінних x, ρ і обмежена на множині E_1 і що для $(x,\rho)\in E_1$ кожен з інтегралів (11) збігається. Для $k=0$ твердження виконується; припустимо, що воно має місце для $k=m$ і доведемо його для $k=m+1$.

Нехай

$$|u_{im}(x,\rho)|\le c_m \quad \text{для} \quad (x,\rho)\in E_1. \quad (12)$$

Тоді з оцінок

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\int_a^{\infty}K_{ij}(x,\xi,\rho)u_{jm}(\xi,\rho)db_j(\xi)\right|\le \le\sum_{j=1}^{n}c_m\int_a^{\infty}|K_{ij}(x,\xi,\rho)|\cdot|db_j(\xi)|\le c_m q$$

випливає збіжність інтегралів (11) і обмеженість функцій $u_{i,m+1}(x,\rho)$, $i=\overline{1,n}$.

Крім того, внаслідок оцінок (6), (12)

$$\left|\int_a^{\infty}K_{ij}(x,\xi,\rho)u_{jm}(\xi,\rho)db_j(\xi)- -\int_a^{\infty}K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)u_{jm}(\xi,\rho_0)db_j(\xi)\right|=$$
$$=\left|\int_a^{\infty}\left[K_{ij}(x,\xi,\rho)-K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)\right]u_{jm}(\xi,\rho)db_j(\xi)+ +\int_a^{N}K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)\left[u_{jm}(\xi,\rho)-u_{jm}(\xi,\rho_0)\right]db_j(\xi)+ +\int_N^{\infty}K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)\left[u_{jm}(\xi,\rho)-u_{jm}(\xi,\rho_0)\right]db_j(\xi)\right|\le$$
$$\le c_m\int_a^{\infty}|K_{ij}(x,\xi,\rho)-K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)|\cdot|db_j(\xi)|+ +\frac{q}{n}\max_{a\le\xi\le N}|u_{jm}(\xi,\rho)-u_{jm}(\xi,\rho_0)|+ +2c_m\int_N^{\infty}|K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)|\cdot|db_j(\xi)|,\quad i,j=\overline{1,n}.$$

Вибравши N достатньо великим, ми можемо зробити третій доданок як завгодно малим; вибравши точку (x, ρ) достатньо близькою до точки (x_0, ρ_0) і користуючись умовою (7) та припущенням неперервності функцій $u_{im}(x, \rho)$, можемо зробити також і перші два доданки як завгодно малими. Отже, доведено, що інтеграли

$$\int_a^\infty K_{ij}(z, \xi, \rho) u_{jm}(\xi, \rho) db_j(\xi), \quad i, j = \overline{1, n},$$

а отже, і $u_{i,m+1}(x, \rho)$, є неперервними функціями на множині E_1.

Розглянемо тепер ряди

$$u_{i0}(x, s) + (u_{i1}(x, s) - u_{i0}(x, s)) + \ldots$$
$$\ldots + (u_{im}(x, s) - u_{i,m-1}(x, s)) + \ldots, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

і введемо позначення

$$\mu_0 = 0,$$
$$\mu_m = \sup_{\substack{(x,\rho)\in E_1 \\ i=\overline{1,n}}} |u_{im}(x, \rho) - u_{i,m-1}(x, \rho)|, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

З формул (6) і (11) випливає, що для $i = \overline{1, n}$

$$|u_{i,m+1}(x, \rho) - u_{im}(x, \rho)| =$$
$$= \left| \sum_{j=1}^n \int_a^\infty K_{ij}(x, \xi, \rho)[u_{jm}(\xi, \rho) - u_{j,m-1}(\xi, \rho)] db_j(\xi) \right| \le$$
$$\le \mu_m \sum_{j=1}^n \int_a^\infty |K_{ij}(x, \xi, \rho)| \cdot |db_j(\xi)| \le q\, \mu_m. \quad (14)$$

Отже,

$$\mu_{m+1} \le \mu_m q.$$

Оскільки за умовою $q < 1$, то ряд

$$\mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots \quad (15)$$

збігається, а тому ряди (13) збігаються рівномірно відносно $(x, \rho) \in E_1$. Позначимо через $u_i(x, \rho)$ суми рядів (13). Тоді

$$u_i(x, \rho) = \lim_{m\to\infty} u_{im}(x, \rho), \quad i = \overline{1, n},$$

причому рівномірно відносно $(x, \rho) \in E_1$. Переходячи в (11) до границі і користуючись умовами (6), отримуємо, що $u_i(x, \rho)$, $i = \overline{1, n}$, є розв'язком системи (5). З рівномірної збіжності рядів (13) і неперервності кожної з функцій $u_{im}(x, \rho)$ випливає, що функції $u_i(x, \rho)$ неперервні на множині E_1. Оскільки суми $u_i(x, \rho)$ рядів (13) за модулем не перевищують суму ряду (15), то всі функції $u_i(x, \rho)$ є обмеженими на множині E_1.

Нарешті, якщо ядра системи (5) задовольняють нерівності (8), то з нерівностей (14) випливає, що

$$\mu_{m+1} \le \mu_m \frac{\tilde{c}}{|\rho|},$$

де $\tilde{c}$ – деяка стала. Тоді внаслідок формул (11) кожна з функцій $u_{ik}(x, \rho)$ має асимптотику при $\rho \to \infty$, $k \to \infty$

$$u_{ik}(x, \rho) = f_i(x, \rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

а отже, мають місце формули (9) і теорему доведено повністю. ■

Теорема 2. *Нехай додатково до умов а), б), в), г), д) маємо:*

е) E є відкритою множиною комплексної площини.

є) Для кожного фіксованого значення $x \in [a, \infty)$ $f_i(x, \rho)$ є однозначними аналітичними функціями змінної $\rho \in E$.

ж) Для кожного фіксованого значення $x \in [a, \infty)$ і для кожної функції $f_i(x, \rho)$, що задовольняє умови д) і е), інтеграли

$$\int_a^\infty K_{ij}(x, \xi, \rho) f_j(\xi, \rho) db_j(\xi)$$

є однозначними аналітичними функціями змінної $\rho \in E$.

Тоді для кожного фіксованого значення $x \in [a, \infty)$ розв'язок $u_i(x, \rho)$ системи (5) є сукупністю однозначних аналітичних функцій змінної $\rho \in E$.

□ *Доведення.* Справді, у цьому випадку при фіксованому $x \in [a, \infty)$ кожна з функцій $u_{im}(x, \rho)$ буде аналітичною функцією змінної $\rho \in E$, і твердження теореми випливає з рівномірної збіжності рядів (13). ■

Зауваження 1. Нехай виконується умова б) теореми 1. Умови а), в), г) теореми 1 будуть виконуватись, якщо

$$K_{ij}(x, \xi, \rho) = \begin{cases} \varphi_{ij1}(x, \xi, \rho), & a \le \xi \le x, \\ \varphi_{ij2}(x, \xi, \rho), & a \le x < \xi, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (16)$$

де $\varphi_{ij1}(x, \xi, \rho)$, $\varphi_{ij2}(x, \xi, \rho)$ – обмежені неперервні за сукупністю змінних (x, ξ, ρ), $x, \xi \in [a, \infty)$, $\rho \in E$, функції, що задовольняють умови

$$c \int_a^\infty |db_j(\xi)| < \frac{1}{n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

або

$$c \bigvee_a^\infty b_j < \frac{1}{n}$$

для

$$c = \max_{\substack{1\le i,j\le n \\ k=1,2}} \left\{ \sup_{\substack{x,\xi\in[a,\infty) \\ \rho\in E}} |\varphi_{ijk}(x, \xi, \rho)| \right\}.$$

□ *Доведення.* Справді, у цьому випадку з (16) і властивостей функцій $\varphi_{ijk}(x, \xi, \rho)$ випливає, що умова а) теореми 1 виконується, умова в) безпосередньо випливає з (17) і умови б). Залишається перевірити умову г). Нехай для визначеності $a < x < x_0$; тоді для $i, j = \overline{1, n}$

$$\int_a^\infty |K_{ij}(x,\xi,\rho) - K_{ij}(x_0,\xi,\rho_0)| \cdot |db_j(\xi)| =$$

$$= \int_a^x |\varphi_{ij1}(x,\xi,\rho) - \varphi_{ij1}(x_0,\xi,\rho_0)| \cdot |db_j(\xi)| +$$

$$+ \int_x^{x_0} |\varphi_{ij2}(x,\xi,\rho) - \varphi_{ij1}(x_0,\xi,\rho_0)| \cdot |db_j(\xi)| +$$

$$+ \int_{x_0}^N |\varphi_{ij2}(x,\xi,\rho) - \varphi_{ij2}(x_0,\xi,\rho_0)| \cdot |db_j(\xi)| +$$

$$+ \int_N^\infty |\varphi_{ij2}(x,\xi,\rho) - \varphi_{ij2}(x_0,\xi,\rho_0)| \cdot |db_j(\xi)| \le$$

$$\le \max_{a \le \xi \le N} |\varphi_{ij1}(x,\xi,\rho) - \varphi_{ij1}(x_0,\xi,\rho_0)| \int_a^\infty |db_j(\xi)| +$$

$$+ \max_{a \le \xi \le N} |\varphi_{ij2}(x,\xi,\rho) - \varphi_{ij2}(x_0,\xi,\rho_0)| \int_a^\infty |db_j(\xi)| +$$

$$+ 2c \int_x^{x_0} |db_j(\xi)| + 2c \int_N^\infty |db_j(\xi)|.$$

Вибравши N достатньо великим, а точку (x,ρ) достатньо близькою до точки (x_0,ρ_0), ми можемо всі доданки останньої суми зробити як завгодно малими. ■

Зауваження 2. Нехай додатково до умов зауваження 1 $\varphi_{ij1}(x,\xi,\rho)$, $\varphi_{ij2}(x,\xi,\rho)$ – аналітичні функції змінної ρ в області E_1 при фіксованих $x, \xi \in [a,\infty)$ та виконується умова д) теореми 1. Тоді виконується умова ж) теореми 2.

□ *Доведення.* Справді, у цьому випадку

$$\int_a^\infty K_{ij}(x,\xi,\rho) f_j(\xi,\rho) db_j(\xi) =$$

$$= \int_a^x \varphi_{ij1}(x,\xi,\rho) f_j(\xi,\rho) db_j(\xi) +$$

$$+ \int_x^\infty \varphi_{ij2}(x,\xi,\rho) f_j(\xi,\rho) db_j(\xi), \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Аналітичність першого інтеграла праворуч випливає з властивостей підінтегральних функцій, а другого – з оцінки

$$\int_x^\infty |\varphi_{ij2}(x,\xi,\rho) f_j(\xi,\rho)| \cdot |db_j(\xi)| \le \tilde{c} \int_x^\infty |db_j(\xi)|,$$

де $\tilde{c}$ – деяка стала. ■

III. Основні результати

Рівняння (3) можна подати у вигляді

$$y^{(n)} + \rho^n y = -p_2 y^{(n-2)} - \ldots - p_n y. \tag{18}$$

За допомогою вектора $\mathbf{y} = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})^T$ зведемо це рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\mathbf{y}' = C'(x)\mathbf{y} \tag{19}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \cdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\rho^n - p_n & -p_{n-1} & \cdots & -p_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \cdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$$\Delta C(x) = C(x) - C(x-0) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\Delta q_n(x) & \cdots & -\Delta q_2(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $[\Delta C(x)]^2 = 0$, то система (19) є коректною [16]. Однорідне рівняння

$$y^{(n)} + \rho^n y = 0 \tag{20}$$

має фундаментальну систему розв'язків $e^{\rho\omega_1 x}$, $e^{\rho\omega_2 x}$, ..., $e^{\rho\omega_n x}$. Розглядаючи праву частину рівняння (18) як "неоднорідність", векторне рівняння (19) подамо у вигляді

$$\mathbf{y}' = C_1'\mathbf{y} + C_2'\mathbf{y},$$

де

$$C_1'(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -\rho^n & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad C_2'(x)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ -p_n(x) & \cdots & -p_2(x) & 0\end{pmatrix}.$$

За формулою Коші для неоднорідного рівняння

$$\mathbf{y}(x)=B(x,a)\,\mathbf{y}_a+\int\limits_a^x B(x,\xi)\,dC_2(\xi)\,\mathbf{y}(\xi), \tag{21}$$

де $B(x,\xi)$ – фундаментальна матриця "однорідної" системи $\mathbf{y}'=C_1'\mathbf{y}$, що має структуру [17]:

$$B(x,\xi)=\begin{pmatrix} K^{\{n-1\}}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}}(x,\xi) & K(x,\xi)\\ K^{\{n-1\}(1)}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}(1)}(x,\xi) & K^{(1)}(x,\xi)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ K^{\{n-1\}(n-1)}(x,\xi) & \cdots & K^{\{1\}(n-1)}(x,\xi) & K^{(n-1)}(x,\xi)\end{pmatrix}, \tag{22}$$

де $K(x,\xi)$ – функція Коші рівняння (20), а фігурними дужками позначено квазіпохідні за другою змінною в сенсі спряженого до (20) рівняння. Відомо [13], що їх визначають за формулами

$$z^{\{0\}}\overset{def}{=}z,\quad z^{\{i\}}=-(z^{\{i-1\}})',\quad i=\overline{1,n-1}. \tag{23}$$

Легко перевірити, що функція Коші для рівняння (20) має вигляд

$$K(x,\xi)=-\frac{\omega_1e^{\rho\omega_1(x-\xi)}+\omega_2e^{\rho\omega_2(x-\xi)}+\ldots+\omega_ne^{\rho\omega_n(x-\xi)}}{n\,\rho^{n-1}}. \tag{24}$$

Справді, вона задовольняє рівняння (20) за змінною x; $K^{(\nu)}(\xi,\xi)=0$, $\nu=\overline{0,n-2}$; $K^{(n-1)}(\xi,\xi)=1$, оскільки $\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{\nu+1}=0$, а $\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{n}=-n$.

Використовуючи співвідношення (23) і (24), рівність (22) запишемо у вигляді

$$B(x,\xi)=-\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \cdots & \frac{1}{n\rho^{n-2}}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^2e^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_je^{\rho\omega_j(x-\xi)}\\ \frac{\rho}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{n+1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \cdots & \frac{1}{n\rho^{n-3}}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^3e^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \frac{1}{n\rho^{n-2}}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^2e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\rho^{n-1}}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{2n-1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \cdots & \frac{\rho}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{n+1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-\xi)}\end{pmatrix},$$

а рівняння (21), позначивши $\mathbf{y}_a=\mathbf{y}(a)=(\tilde c_1,\tilde c_2,\ldots,\tilde c_n)^T$, запишемо як

$$\begin{pmatrix} y(x)\\ \cdots\\ y^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{\tilde c_1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-a)}-\ldots-\frac{\tilde c_n}{n\rho^{n-1}}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_je^{\rho\omega_j(x-a)}\\ \cdots\\ -\frac{\tilde c_1\rho^{n-1}}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{2n-1}e^{\rho\omega_j(x-a)}-\ldots-\frac{\tilde c_n}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-a)}\end{pmatrix}+$$

$$+\int\limits_a^x\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \cdots & \frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_je^{\rho\omega_j(x-\xi)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\rho^{n-1}}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^{2n-1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)} & \cdots & \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-\xi)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0\\ \cdots\\ \sum\limits_{s=2}^{n}y^{(n-s)}(\xi)\,dq_s(\xi)\end{pmatrix}.$$

Сталі $\tilde c_j$, $j=\overline{1,n}$, можна вибрати так, щоб виконувалась система рівностей

$$\begin{cases} y(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_je^{\rho\omega_jx}+\frac{1}{n\,\rho^{n-1}}\sum\limits_{s=2}^{n}\int\limits_a^x\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_je^{\rho\omega_j(x-\xi)}y^{(n-s)}(\xi)\,dq_s(\xi),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y^{(n-1)}(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\rho^{n-1}\omega_j^{n-1}e^{\rho\omega_jx}+\frac{1}{n}\sum\limits_{s=2}^{n}\int\limits_a^x\sum\limits_{j=1}^{n}\omega_j^ne^{\rho\omega_j(x-\xi)}y^{(n-s)}(\xi)\,dq_s(\xi).\end{cases} \tag{25}$$

Справді, з рівності

$$\left(-\frac{\tilde{c}_1}{n}\omega_1^n - \ldots - \frac{\tilde{c}_n}{n\rho^{n-1}}\omega_1\right)e^{-\rho\omega_1 a}e^{\rho\omega_1 x} + \ldots + \left(-\frac{\tilde{c}_1}{n}\omega_n^n - \ldots - \frac{\tilde{c}_n}{n\rho^{n-1}}\omega_n\right)e^{-\rho\omega_n a}e^{\rho\omega_n x} = c_1 e^{\rho\omega_1 x} + \ldots + c_n e^{\rho\omega_n x}$$

отримуємо систему

$$\begin{gathered} -e^{-\rho\omega_1 a}(\tilde{c}_1\omega_1^n\rho^{n-1} + \ldots + \tilde{c}_n\omega_1) = c_1 n\rho^{n-1}, \\ \ldots, \\ -e^{-\rho\omega_n a}(\tilde{c}_1\omega_n^n\rho^{n-1} + \ldots + \tilde{c}_n\omega_n) = c_n n\rho^{n-1}, \end{gathered}$$

визначник якої при $|\rho| > 0$ відмінний від нуля як визначник Вандермонда.

Теорема 1. *Нехай $p_i = q_i'$, $q_i(x)$, $i = \overline{2,n}$, – неперервні праворуч функції обмеженої варіації на півосі $[0,\infty)$. Тоді в усій області комплексної ρ-площини рівняння (3) має n лінійно незалежних розв'язків $y_k(x,\rho)$, $k = \overline{1,n}$, таких, що при $x \geq a \geq 0$*

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k\nu}(x,\rho) \tag{26}$$

для $k = \overline{1,n}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, де функції $z_{k\nu}(x,\rho)$ обмежені в області $a \leq x < \infty$, $\rho \in S$, $|\rho| \geq r > 0$.

Функції $y_k^{(\nu)}(x,\rho)$ неперервні за сукупністю змінних (x,ρ) при $x \in (0,\infty)$, $\rho \in S$, $|\rho| \geq r$; для кожного фіксованого значення $x \in [0,\infty)$ $y_k^{(\nu)}(x,\rho)$ – регулярні (однозначні аналітичні) функції від ρ в області $\rho \in S$, $|\rho| \geq r$.

Для $\rho \in S$, $\rho \to \infty$

$$y_k^{(\nu)}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \tag{27}$$

рівномірно відносно $x \in [0,\infty)$.

□ *Доведення.* Нехай

$$y^{(\nu)}(x,\rho) = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_\nu(x,\rho), \quad \nu = \overline{0,n-1}, \tag{28}$$

для деякого фіксованого k, $k = \overline{1,n}$.

Тоді (25) можна записати у вигляді

$$\rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_\nu(x,\rho) = \sum_{j=1}^n c_j\rho^\nu\omega_j^\nu e^{\rho\omega_j x} + \frac{1}{n\,\rho^{n-\nu-1}}\sum_{s=2}^n\int_a^x\sum_{j=1}^n\omega_j^{\nu+1}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}\rho^{n-s}e^{\rho\omega_k\xi}z_{n-s}(\xi)dq_s(\xi),$$

звідки

$$z_\nu = \sum_{j=1}^n c_j\omega_j^\nu e^{\rho(\omega_j-\omega_k)x} + \frac{1}{n}\sum_{s=2}^n\int_a^x\sum_{j=1}^n\omega_j^{\nu+1}\rho^{1-s}e^{\rho\omega_k(\xi-x)}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}z_{n-s}(\xi)dq_s(\xi), \quad \nu = \overline{0,n-1}. \tag{29}$$

Приймемо для фіксованого k, $k = \overline{1,n}$,

$$c_j' = \begin{cases} c_j, & j = \overline{1,k}, \\ c_j + \sum\limits_{s=2}^n\int\limits_a^\infty\frac{\omega_j}{n}\rho^{1-s}e^{\rho(\omega_k-\omega_j)\xi}z_{n-s}(\xi)dq_s(\xi), & j = \overline{k+1,n}. \end{cases} \tag{30}$$

Кожен інтеграл Рімана-Стільтьєса в (30) існує і збігається внаслідок неперервності й обмеженості функцій

$$\rho^{1-s}e^{\rho(\omega_k-\omega_j)\xi}z_{n-s}(\xi)$$

в припущенні обмеженості і неперервності функцій $z_{n-s}(\xi)$, бо $\mathrm{Re}(\rho\omega_k) \leq \mathrm{Re}(\rho\omega_j)$, $j = \overline{k+1,n}$ (це випливає з нерівностей (4)).

Тоді система (29) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} z_\nu = {} & \sum_{j=1}^n c_j'\omega_j^\nu e^{\rho(\omega_j-\omega_k)x} + \frac{1}{n}\sum_{s=2}^n\int_a^x\sum_{j=1}^k\omega_j^{\nu+1}\rho^{1-s}e^{\rho\omega_k(\xi-x)}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}z_{n-s}(\xi)dq_s(\xi) - \\ & -\frac{1}{n}\sum_{s=2}^n\int_x^\infty\sum_{j=k+1}^n\omega_j^{\nu+1}\rho^{1-s}e^{\rho\omega_k(\xi-x)}e^{\rho\omega_j(x-\xi)}z_{n-s}(\xi)dq_s(\xi), \quad \nu = \overline{0,n-1}. \end{aligned} \tag{31}$$

Припустимо, що рівняння (3) має розв'язок y_k такий, що $c'_\nu = 0$ при $\nu \neq k$, $c'_k = 1$. Позначимо

$$y_k^{(\nu)} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k\nu},$$

$$\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho) = \begin{cases} \frac{1}{n} e^{\rho\omega_k(\xi-x)} \rho^{2-s} \sum\limits_{j=1}^{k} \omega_j^{\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}, & \xi \le x, \\ -\frac{1}{n} e^{\rho\omega_k(\xi-x)} \rho^{2-s} \sum\limits_{j=k+1}^{n} \omega_j^{\nu+1} e^{\rho\omega_j(x-\xi)}, & \xi > x, \end{cases} \tag{32}$$

$$k = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{0,n-1}, \quad s = \overline{2,n}.$$

Тоді для функцій $z_{k\nu}(x,\rho)$ отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$z_{k\nu}(x,\rho) = \omega_k^\nu + \frac{1}{\rho} \sum_{s=2}^{n} \int_a^\infty \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\, z_{k,n-s}(\xi,\rho)\, dq_s(\xi). \tag{33}$$

Кожна з функцій $\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)$, $k=\overline{1,n}$, $\nu=\overline{0,n-1}$, $s=\overline{2,n}$, неперервна ліворуч для всіх $x,\xi \in [0,\infty)$ та регулярна для всіх ρ, таких, що $|\rho| \ge r > 0$. Існує така стала $C_1 > 0$, що для $\xi \le x$

$$|\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)| = \frac{1}{n}|\rho|^{2-s} \left| \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{\nu+1} e^{(\rho\omega_j - \rho\omega_k)(x-\xi)} \right| \le C_1, \quad k=\overline{1,n}, \quad \nu=\overline{0,n-1}, \quad s=\overline{2,n}, \tag{34}$$

бо $\operatorname{Re}(\rho\omega_j) \le \operatorname{Re}(\rho\omega_k)$, $j=\overline{1,k}$, внаслідок (4). Аналогічно, існує така стала $C_2 > 0$, що для $\xi > x$

$$|\mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)| = \frac{1}{n}|\rho|^{2-s} \left| \sum_{j=k+1}^{n} \omega_j^{\nu+1} e^{(\rho\omega_j - \rho\omega_k)(x-\xi)} \right| \le C_2, \quad k=\overline{1,n}, \quad \nu=\overline{0,n-1}, \quad s=\overline{2,n}, \tag{35}$$

бо $\operatorname{Re}(\rho\omega_j) \ge \operatorname{Re}(\rho\omega_k)$, $j=\overline{k+1,n}$, внаслідок (4).

Нехай $C = \max\{C_1, C_2\}$. Внаслідок обмеженості варіації функцій $q_j(x)$ можна знайти таке число $a \ge 0$, що

$$c\frac{1}{r} \int_a^\infty |dq_s(\xi)| = \frac{c}{r} \bigvee_a^\infty q_s < \frac{1}{n}, \quad s=\overline{2,n}. \tag{36}$$

Тоді будуть виконані всі умови теорем 1 і 2 попереднього розділу, і система (33) має згідно з цими теоремами обмежений неперервний розв'язок $z_{k\nu}(x,\rho)$, $x \in [a,\infty)$, $\rho \in S$, $|\rho| \ge r > 0$, а згідно з (9) мають місце асимптотичні формули (27) для $\rho \to \infty$.

Доведемо, що існує розв'язок (26) рівняння (3), який задовольняє (33). Для цього досить показати, що якими б не були сталі c'_ν, існує розв'язок (28) рівняння (3), що задовольняє (31) при цих значеннях c'_ν.

Рівності (30) – це лінійне перетворення від c_j до c'_j. Очевидно, достатньо довести, що визначник перетворення (30) для великих $|\rho|$, $\rho \in S$, відрізняється від нуля. У цьому випадку рівняння (30) можна розв'язати відносно c_j при довільно заданих c'_j.

Якщо визначник перетворення (30) дорівнює нулю при як завгодно великих $|\rho|$, $\rho \in S$, то для цих значень ρ рівняння (30) мають нетривіальні розв'язки відносно c_j при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0$. Відповідна функція

$$z_\nu(x,\rho) = \rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k x} y^{(\nu)}(x,\rho) \tag{37}$$

буде тоді нетривіальним розв'язком системи

$$z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{n} \sum_{s=2}^{n} \int_a^x \sum_{j=1}^{k} \omega_j^{\nu+1} \rho^{1-s} e^{(\rho\omega_j - \rho\omega_k)(x-\xi)} z_{n-s}(\xi,\rho)\, dq_s(\xi) -$$

$$-\frac{1}{n} \sum_{s=2}^{n} \int_x^\infty \sum_{j=k+1}^{n} \omega_j^{\nu+1} \rho^{1-s} e^{(\rho\omega_j - \rho\omega_k)(x-\xi)} z_{n-s}(\xi,\rho)\, dq_s(\xi), \quad \nu = \overline{0,n-1},$$

яку можна отримати з (31) при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0$. Доведемо, що це неможливо. Нехай $m(\rho) = \max|z_\nu(x,\rho)|$, $a \le x \le b$, $\nu = \overline{0,n-1}$. Врахувавши (32), останню систему запишемо у вигляді

$$z_\nu(x,\rho) = \frac{1}{\rho} \sum_{s=2}^{n} \int_a^\infty \mathcal{K}_{k\nu s}(x,\xi,\rho)\, z_{n-s}(\xi,\rho)\, dq_s(\xi).$$

Згідно з (34), (35)

$$|z_\nu(x,\rho)| \le \frac{C}{|\rho|} \int\limits_a^\infty |dq_s(\xi)|\, m(\rho) \le m(\rho)\frac{C_1}{|\rho|},$$

де C_1 – деяка стала. Ця нерівність повинна справджуватись для всіх ρ, але для великих $|\rho|$ вона є можливою лише тоді, коли $m(\rho) = 0$, отже, $z_\nu(x,\rho) = 0$. Звідси на основі (37) отримуємо, що $y \equiv 0$ при $\nu = 0$.

Залишається довести ще лінійну незалежність розв'язків $y_k(x,\rho)$. Для цього обчислимо вронскіан цих функцій при $\rho \to \infty$

$$W(x,\rho) = 1\cdot\rho\cdot\rho^2\ldots\rho^{n-1}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_n)x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1}\end{vmatrix} = \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1\\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Оскільки визначник Вандермонда різних чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ відмінний від нуля, то і визначник Вронського не дорівнюватиме нулю для всіх $x \in [a,\infty)$, $\rho \in S$. ■

Зауваження 1. Кожен з отриманих розв'язків $y_k(x,\rho)$, $k = \overline{1,n}$, можна продовжити на відрізок $[0,a]$, побудувавши на ньому розв'язки рівняння (3), які б задовольняли початкові умови

$$y^{(\nu)}(a) = y_k^{(\nu)}(a), \quad \nu = \overline{0,n-1}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Зауваження 2. Якщо r є настільки великим, що

$$\frac{c}{r}\int\limits_0^\infty |dq_j(\xi)| < \frac{1}{n}, \quad j = \overline{2,n},$$

у позначеннях теореми 1 цього розділу, то у цій теоремі можна прийняти $a = 0$.

Висновки

Побудовані асимптотичні формули для лінійно незалежної системи розв'язків диференціального рівняння з мірами на півосі дозволяють досліджувати поведінку власних значень та власних функцій відповідної крайової задачі. Наявність узагальнених функцій в коефіцієнтах диференціального рівняння не впливає на ці формули.

Література

[1] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[2] Шувар О. Б. Асимптотичні формули для власних значень диференціально-граничного оператора непарного порядку в просторі вектор-функцій // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. Сер. Прикладна математика. – 2000. – № 407. – С. 54–57.

[3] Гомилко А. М., Радзиевский Г. В. Асимптотика по параметру решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, № 11. – С. 1460–1469.

[4] Радзиевский Г. В. Асимптотика по параметру фундаментальной системы решений линейного функционально-дифференциального уравнения // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 6. – С. 811–836.

[5] Рыхлов В. С. Асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида с параметром // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 1. – С. 96–108.

[6] Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 6. – С. 735–751.

[7] Махней О. В. Асимптотика власних значень і власних функцій сингулярного диференціального оператора на скінченному інтервалі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 17–25.

[8] Альбеверио С., Гестези Ф., Хёэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 566 с.

[9] Шин Д. О квази-дифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1938. – Т. 18. – № 8. – С. 523–526.

[10] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7 (49). – № 3. – С. 479–527.

[11] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[12] Тацій Р. М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Львів. держ. ун-т ім. і. Франка. – Львів, 1994. – 37 с.

[13] Тацій Р. М. Узагальнені квазідиференціальні рівняння: Препр. / АН України ІППММ; № 2-94. – Львів, 1994. – С. 1–54.

[14] Фунтаков В. Н. О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора произвольного четного порядка на полуоси $[0,\infty)$ // Изв. академии наук Аз. ССР. – 1960. – № 6. – С. 3–19.

[15] Наймарк М. А. Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси // Труды Моск. мат. об-ва. – 1954. – Т. 3. – С. 181–270.

[16] Стасюк М. Ф., Тацій Р. М. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фізико-математичні науки. – 2006. – № 566. – С. 33–40.

[17] Тацій Р. М., Пахолок Б. Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // ДАН УРСР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С МЕРАМИ НА ПОЛУОСИ

О.В. Махней

Прикарпатский национальный университет имени Василя Стефаника
76025, Ивано-Франковск, ул. Шевченко, 57, Украина

С помощью концепции квазипроизводных построены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений дифференциального уравнения n-го порядка с мерами на полуоси.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, обобщенные функции, меры, асимптотика решений, полуось, квазипроизводные.

2000 MSC: 34E05

УДК: 511.926.4

ASYMPTOTICS OF A FUNDAMENTAL SYSTEM OF SOLUTIONS FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH MEASURES ON THE SEMI-AXIS

O.V. Makhnei

Precarpathian National University named after Vasyl Stefanyk,
57 Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, UA-76025, Ukraine

With the help of a conception of quasiderivatives the asymptotic formulas for a fundamental system of solutions of a differential equation of the n-th order with measures on the semi-axis $[0,\infty)$ are constructed.

Keywords: differential equation, distributions, measures, asymptotics of solutions, semi-axis, quasiderivatives.

2000 MSC: 34E05

УДК: 517.926.4