МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

методичні вказівки та контрольні роботи
для студентів заочної форми навчання

Затверджено на засіданні
кафедри статистики і
вищої математики
Протокол № від

м. Івано-Франківськ
2010 р.

Пропоновані методичні вказівки мають своєю метою допомогти студентам заочної форми навчання організувати свою самостійну роботу при вивченні та виконанні контрольних робіт з "Теорії ймовірностей та математичної статистики".

Автор: доц. Осипчук М.М.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри статистики і вищої математики, доцент Осипчук М. М.

1 Загальні зауваження

Самостійна робота над навчальним матеріалом є основною формою навчання студента-заочника. Студенту перш за все необхідно засвоїти відповідний теоретичний матеріал за підручниками згідно з теоретичними питаннями, приведеними на початку кожної контрольної роботи. Потім отримати навички в розв'язуванні задач. З метою полегшення цього процесу в методичних вказівках наведено зразки розв'язування типових задач. А вже після цього можна братися за виконання контрольної роботи.

Студент виконує завдання контрольної роботи свого варіанту, номер якого збігається з двома останніми цифрами номера залікової книжки. При виконанні та оформленні контрольної роботи потрібно строго дотримуватись вказаних нижче правил.

1. Кожна робота виконується в окремому зошиті.

2. На обкладинці зошита повинні бути чітко написані: прізвище (в називному відмінку), ініціали, академічна група, навчальний номер (номер залікової книжки), назва дисципліни.

3. В роботу повинні бути включені всі задачі відповідного варіанта.

4. Перед розв'язком кожної задачі потрібно повністю переписати умову. [1]

5. Розв'язки задач потрібно розміщувати в порядку їх номерів, зберігаючи нумерацію завдань, вказану в методичних вказівках.

6. Розв'язки задач повинні містити детальні пояснення і мотивації всіх дій в ході розв'язку.

Робота, виконана без дотримання цих правил, не допускається до захисту і повертається студентові для переробки. Після отримання прорецензованої роботи, студенту потрібно в короткий термін виправити всі відзначені рецензентом помилки та неточності в кінці роботи, на спеціально залишених для цього чистих листках зошита.

Робота допущена до захисту студенту не повертається.

Номер кожного завдання має вигляд "№задачі.№пункту"в цій задачі. В наведеній нижче таблиці виписані номери пунктів в задачах для кожного варіанта. В кожній контрольній роботі слід виконати всі задачі, вибравши відповідно до варіанта пункти.

Розподіл пунктів в задачах за варіантами.

[1] В багатьох задачах основна частина умови є спільною для всіх варіантів.

№ варіанту	Номери задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Номери пунктів							
01	1	1	1	1	1	1	1	1
02	2	2	2	2	2	2	2	2
03	3	3	3	3	3	3	3	3
04	4	4	4	4	4	4	4	4
05	5	5	5	5	5	5	5	5
06	6	6	6	6	6	6	6	6
07	7	7	7	7	7	7	7	7
08	8	8	8	8	8	8	8	8
09	9	9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10

№ варіанту	Номери задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Номери пунктів							
11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14	14	14
15	15	15	15	15	15	15	15	15
16	16	16	16	16	16	16	16	16
17	17	17	17	17	17	17	17	17
18	18	18	18	18	18	18	18	18
19	19	19	19	19	19	19	19	19
20	20	20	20	20	20	20	20	20
21	21	21	21	21	21	21	21	21
22	22	22	22	22	22	22	22	22
23	23	23	23	23	23	23	23	23
24	24	24	24	24	24	24	24	24
25	25	25	25	25	25	25	25	25
26	26	26	26	26	26	26	26	26
27	27	27	27	27	27	27	27	27
28	28	28	28	28	28	28	28	28
29	29	29	29	29	29	29	29	29
30	30	30	30	30	30	30	30	30
31	2	3	4	5	6	7	8	9
32	3	4	5	6	7	8	9	10
33	4	5	6	7	8	9	10	11
34	5	6	7	8	9	10	11	12
35	6	7	8	9	10	11	12	13
36	7	8	9	10	11	12	13	14
37	8	9	10	11	12	13	14	15
38	9	10	11	12	13	14	15	16

№ варіанту	Номери задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Номери пунктів							
39	10	11	12	13	14	15	16	17
40	11	12	13	14	15	16	17	18
41	12	13	14	15	16	17	18	19
42	13	14	15	16	17	18	19	20
43	14	15	16	17	18	19	20	21
44	15	16	17	18	19	20	21	22
45	16	17	18	19	20	21	22	23
46	17	18	19	20	21	22	23	24
47	18	19	20	21	22	23	24	25
48	19	20	21	22	23	24	25	26
49	20	21	22	23	24	25	26	27
50	21	22	23	24	25	26	27	28
51	22	23	24	25	26	27	28	29
52	23	24	25	26	27	28	29	30
53	24	25	26	27	28	29	30	1
54	25	26	27	28	29	30	1	2
55	26	27	28	29	30	1	2	3
56	27	28	29	30	1	2	3	4
57	28	29	30	1	2	3	4	5
58	29	30	1	2	3	4	5	6
59	30	1	2	3	4	5	6	7
60	1	2	3	4	5	6	7	8
61	3	5	7	9	11	13	15	17
62	4	6	8	10	12	14	16	18
63	5	7	9	11	13	15	17	19
64	6	8	10	12	14	16	18	20
65	7	9	11	13	15	17	19	21
66	8	10	12	14	16	18	20	22

№ варіанту	Номери задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Номери пунктів							
67	9	11	13	15	17	19	21	23
68	10	12	14	16	18	20	22	24
69	11	13	15	17	19	21	23	25
70	12	14	16	18	20	22	24	26
71	13	15	17	19	21	23	25	27
72	14	16	18	20	22	24	26	28
73	15	17	19	21	23	25	27	29
74	16	18	20	22	24	26	28	30
75	17	19	21	23	25	27	29	1
76	18	20	22	24	26	28	30	2
77	19	21	23	25	27	29	1	3
78	20	22	24	26	28	30	2	4
79	21	23	25	27	29	1	3	5
80	22	24	26	28	30	2	4	6
81	23	25	27	29	1	3	5	7
82	24	26	28	30	2	4	6	8
83	25	27	29	1	3	5	7	9
84	26	28	30	2	4	6	8	10
85	27	29	1	3	5	7	9	11
86	28	30	2	4	6	8	10	12
87	29	1	3	5	7	9	11	13
88	30	2	4	6	8	10	12	14
89	1	3	5	7	9	11	13	15
90	2	4	6	8	10	12	14	16
91	4	7	10	13	16	19	22	25
92	5	8	11	14	17	20	23	26
93	6	9	12	15	18	21	24	27
94	7	10	13	16	19	22	25	28

№ варіанту	Номери задач							
	1	2	3	4	5	6	7	8
	Номери пунктів							
95	8	11	14	17	20	23	26	29
96	9	12	15	18	21	24	27	30
97	10	13	16	19	22	25	28	1
98	11	14	17	20	23	26	29	2
99	12	15	18	21	24	27	30	3
00	13	16	19	22	25	28	1	4

2 Теоретичні питання

Простір елементарних подій. Випадкові події, операції над подіями та відношення між ними. Ймовірнісний простір. Аксіоми теорії ймовірностей. Класичне означення ймовірності. Геометричні ймовірності.

Умовна ймовірність відносно події. Незалежність подій. Ймовірність добутку подій. Теорема повної ймовірності, формули Байєса.

Випадкова величина. Функція розподілу випадкової величини та її властивості. Неперервні та дискретні розподіли. Нормальний, пуассонівський, біноміальний, рівномірний, показниковий розподіли. Випадковий вектор та його розподіл, умовні розподіли та розподіли окремих елементів вектора. Функції від випадкових величин. Розподіл суми незалежних випадкових величин.

Математичне сподівання, дисперсія та інші моментні характеристики випадкових величин; їх властивості. Коваріація, коефіцієнт кореляції.

Нерівність Чебишова. Закони великих чисел (теореми Чебишова, Маркова, Бернуллі, Бореля). Центральна гранична теорема та наслідки з неї (теореми Муавра-Лапласа).

Елементи математичної статистики. Вибірки. Точкові оцінки невідомих параметрів розподілу та їх властивості. Інтервальні оцінки параметрів; довірчі інтервали для параметрів нормального розподілу. Перевірка гіпотез про розподіл. Елементи регресивного аналізу.

3 Приклади

Приклад 1. Із скриньки, що містить 7 білих і 5 чорних кульок, навмання вибрано 3 кульки. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{\text{вибрано хоча б одну білу кульку}\}$,
$B = \{\text{вибрано не менш ніж дві білі кульки}\}$.

Розв'язок.

Оскільки всіх кульок є 12 то можливих варіантів вибору трьох кульок є $n = C_{12}^3 = 220$. З цих варіантів є $C_7^k C_5^{3-k}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ варіантів вибору рівно k білих кульок. Тому подію A задовольняють

$$m_1 = C_{12}^3 - C_5^3 = 220 - 10 = 210,$$

а подію B —

$$m_2 = C_7^2 C_5^1 + C_7^3 = 21 \cdot 5 + 35 = 140$$

варіантів.

Отже, за класичним означенням ймовірності

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{21}{22} = 0.95, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{7}{11} = 0.64.$$

Приклад 2. З першої скриньки, що містить 20 кульок, можна з ймовірністю 0.05 вийняти чорну кульку, а з другої скриньки, в якій є 60 кульок, можна вийняти чорну кульку з ймовірністю 0.1. Всі кульки висипали в одну скриньку і навмання вибрали одну кульку. Яка ймовірність того, що вона чорна?

Розв'язок.

Розглянемо повну групу подій H_i = {вибрана кулька "походить"з i-ої скриньки}, $i = 1{,}2$. Зрозуміло, що

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{20}{20+60} = 0.25, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{60}{20+60} = 0.75.$$

Нехай A = {вибрано чорну кульку}, тому

$$\mathbf{P}(A/H_1) = 0.05, \quad \mathbf{P}(A/H_2) = 0.1.$$

За формулою повної ймовірності

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A/H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A/H_2)\mathbf{P}(H_2) =$$
$$= 0.05 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.75 = 0.0875.$$

Приклад 3. Серед виробів заводу 10% бракованих. При перевірці партії виробів виріб з дефектом з ймовірністю 0.95 визнається бракованим, але і якісний виріб з ймовірністю 0.03 визнається бракованим. Випадково вибраний з партії виріб був визнаний бракованим. Яка ймовірність того, що він насправді якісний?

Розв'язок.

Розглянемо повну групу подій (гіпотез)

H_1 = {вибраний виріб якісний},

H_2 = {вибраний виріб бракований}.

З умови задачі $\mathbf{P}(H_1) = 0.9$, $\mathbf{P}(H_2) = 0.1$.

Нехай подія A = {вибраний виріб визнано бракованим}, тому

$$\mathbf{P}(A/H_1) = 0.03, \quad \mathbf{P}(A/H_2) = 0.95.$$

За формулою Байєса ймовірність того, що вибраний виріб насправді є якісним (хоч був визнаний бракованим) дорівнює

$$\mathbf{P}(H_1/A) = \frac{\mathbf{P}(A/H_1)\mathbf{P}(H_1)}{\mathbf{P}(A/H_1)\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(A/H_2)\mathbf{P}(H_2)} =$$

$$= \frac{0.03 \cdot 0.9}{0.03 \cdot 0.9 + 0.95 \cdot 0.1} = 0.221.$$

Приклад 4. В пункті а) описані випадковий експеримент і пов'язана з ним випадкова величина ξ; в пункті б) задана щільність розподілу $f_\xi(x)$ випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу $F_\xi(x)$, математичне сподівання $\mathbf{M}\xi$, дисперсію $\mathbf{D}\xi$ випадкової величини ξ.

а) Тричі підкидається правильна монета. ξ — кількість гербів, які випали;

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, \text{якщо } x \in (0;1) \\ 0, \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

Розв'язок.

а) В кожному підкиданні поява герба відбувається з ймовірністю 0.5. Оскільки результати окремих підкидань між собою незалежні, то

$$\mathbf{P}(\xi = k) = C_3^k (0.5)^k (0.5)^{3-k} = \frac{C_3^k}{8}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Тобто розподіл випадкової величини ξ такий

$$\mathbf{P}(\xi = 0) = \frac{C_3^0}{8} = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(\xi = 1) = \frac{C_3^1}{8} = \frac{3}{8},$$
$$\mathbf{P}(\xi = 2) = \frac{C_3^2}{8} = \frac{3}{8}, \quad \mathbf{P}(\xi = 3) = \frac{C_3^3}{8} = \frac{1}{8}.$$

Згідно означення, функція розподілу

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}(\xi < x) = \sum_{k<x} \mathbf{P}(\xi = k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{якщо } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8}, & \text{якщо } 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}, & \text{якщо } 2 < x \leq 3 \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8}, & \text{якщо } x > 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0 \\ \frac{1}{8}, & \text{якщо } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } 1 < x \leq 2 \\ \frac{7}{8}, & \text{якщо } 2 < x \leq 3 \\ 1, & \text{якщо } x > 3 \end{cases}$$

Для математичного сподівання та дисперсії матимемо

$$\mathbf{M}\xi = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 =$$
$$= 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{9}{4} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

б) Оскільки

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(y)\, dy \quad \text{і} \quad \int_0^x 2y\, dy = x^2,$$

то

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0 \\ x^2, & \text{якщо } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{якщо } x > 1 \end{cases}.$$

Математичне сподівання

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx = \int_0^1 2x^2\, dx = 2\, \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсія

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\, dx - (\mathbf{M}\xi)^2 =$$

$$= \int_0^1 2x^3\, dx - \frac{4}{9} = \frac{x^4}{2}\bigg|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Приклад 5. В пункті а) задано закон розподілу випадкового вектора $(\xi;\eta)$; в пункті б) задана щільність розподілу $f_{\xi;\eta}(x;y)$ випадкового вектора $(\xi;\eta)$. Знайти коефіцієнти кореляції $r_{\xi\eta}$ в кожному з пунктів.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	0	2
0	0.2	0.3	0.1
1	0	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & \text{при } 0 \le x \le 1, x \le y \le 1 \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Розв'язок.

Знайдемо розподіли випадкових величин ξ та η за формулами:

$$p_i = \mathbf{P}(\xi = x_i) = \sum_j p_{ij}, \quad q_j = \mathbf{P}(\eta = y_j) = \sum_i p_{ij},$$

тобто

$$\mathbf{P}(\xi = -2) = 0.2 + 0 = 0.2,$$
$$\mathbf{P}(\xi = 0) = 0.3 + 0.2 = 0.5,$$
$$\mathbf{P}(\xi = 2) = 0.1 + 0.2 = 0.3.$$

$$\mathbf{P}(\eta = 0) = 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.6,$$
$$\mathbf{P}(\eta = 1) = 0 + 0.2 + 0.2 = 0.4;$$

Коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)},$$

де

$$\mathbf{M}\xi = \sum_i x_i p_i, \mathbf{M}\eta = \sum_j y_j q_j,$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\mathbf{M}\xi)^2,$$

$$\mathbf{D}\eta = \mathbf{M}\eta^2 - (\mathbf{M}\eta)^2 = \sum_j y_j^2 q_j - (\mathbf{M}\eta)^2,$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}\xi}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{\mathbf{D}\eta}, \quad \mathbf{M}\xi\eta = \sum_{ij} x_i y_j p_{ij}.$$

Тому, провівши обчислення, знайдемо

$$\mathbf{M}\xi\eta = 0.4, \quad \mathbf{M}\xi = 0.2, \quad \mathbf{M}\eta = 0.4,$$

$$\sigma(\xi) \approx 1.4, \quad \sigma(\eta) = 0.49 \text{ і}$$

$$r_{\xi\eta} = \frac{0,4 - 0,08}{1,4 \cdot 0,49} = 0.47.$$

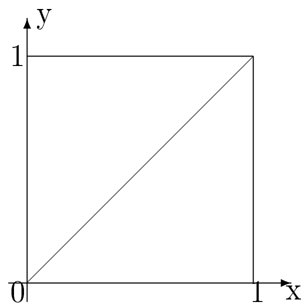


Рис. 1:

б) Коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою

$$r_{\xi\eta} = \frac{\mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)},$$

де

$$\mathbf{M}\xi = \iint\limits_G x f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy, \mathbf{M}\eta = \iint\limits_G y f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy,$$

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2 = \iint\limits_G x^2 f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy - (\mathbf{M}\xi)^2,$$

$$\mathbf{D}\eta = \mathbf{M}\eta^2 - (\mathbf{M}\eta)^2 = \iint\limits_G y^2 f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy - (\mathbf{M}\eta)^2,$$

$$\sigma(\xi) = \sqrt{\mathbf{D}\xi}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{\mathbf{D}\eta},$$

$$\mathbf{M}\xi\eta = \iint\limits_G xy f_{\xi\eta}(x;y)\,dx\,dy.$$

Область $G = \{0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$ зображено на рис. 1
Проведемо обчислення

$$\mathbf{M}\xi = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2x(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(2x^2y + xy^2\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^2 + x - 3x^3)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = \frac{5}{12}.$$

$$\mathbf{M}\xi^2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2x^2(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(2x^3y + x^2y^2\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x^3 + x^2 - 3x^4)dx = \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{3x^4}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7}{30}.$$

$$\mathbf{D}\xi = \frac{7}{30} - \frac{25}{144} = \frac{43}{720}, \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{12}\sqrt{\frac{43}{5}} \approx 0.244.$$

$$\mathbf{M}\eta = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2y(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(y^2x + \frac{2}{3}y^3\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x^3\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{12}x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{M}\eta^2 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2y^2(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{3}y^3x + \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{7}{6}x^4\right) dx = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}x - \frac{7}{30}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

$$\mathbf{D}\eta = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}, \quad \sigma(\eta) = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0.194.$$

$$\mathbf{M}\xi\eta = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 2xy(x+y)dy = \int\limits_0^1 \left(x^2y^2 + \frac{2}{3}xy^3\right)\Big|_x^1 dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}x^4\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^5}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$r_{\xi\eta} \approx \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{4}}{0.244 \cdot 0.194} \approx 0.44.$$

Приклад 6. За даною вибіркою з нормально розподіленої генеральної сукупності знайти:

1. точкову оцінку математичного сподівання (вибіркове середнє);
2. точкову оцінку дисперсії (вибіркову дисперсію);
3. інтервальну оцінку математичного сподівання при рівні надійності γ. Розглянути два випадки:
   (a) дисперсія відома і дорівнює σ^2;
   (b) дисперсія невідома;
4. інтервальну оцінку дисперсії при рівні надійності γ;
5. побудувати гістограму частот та графік емпіричної функції розподілу, розбивши варіаційний ряд на $\sqrt{n}$ рівних частин (n — об'єм вибірки).

-1.3, -1.7, -0.5, -1.1, 0.6, -1.0, 0.8, 1.0, -2.1, 0.2, 0.8, -1.0, 1.3, 0.7, 1.2, 0.6.

$$\gamma = 0.8, \quad \sigma = 1.$$

Розв'язок.

Об'єм вибірки становить $n = 16$.

Точкові оцінки математичного сподівання $\overline{x}$ та дисперсії s^2 знайдемо за формулами

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right).$$

Виконавши необхідні підрахунки, одержимо $\overline{x} \approx -0.094$, $s^2 \approx 1.265$ ($s \approx 1.125$).

Знайдемо інтервальні оцінки математичного сподівання та дисперсії.

Нехай дисперсія відома і дорівнює $\sigma^2 = 1$, тому надійний інтервал для математичного сподівання при рівні надійності γ має межі

$$\overline{x} \pm u_{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

де $u_{\frac{\gamma+1}{2}}$ — квантиль порядку $\frac{\gamma+1}{2}$ стандартного нормального розподілу ($N(0;1)$).

З таблиці знаходимо $u_{0.9} \approx 1.28$ і, підставивши в наведені вирази, одержимо надійний інтервал для математичного сподівання при рівні надійності $\gamma = 0.8$

$$(-0.414; 0.226).$$

Якщо ж дисперсія невідома, то надійний інтервал для математичного сподівання при рівні надійності γ має межі

$$\overline{x} \pm t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},$$

де $t_{\frac{\gamma+1}{2}}(n-1)$ — квантиль порядку $\frac{\gamma+1}{2}$ розподілу Стьюдента з $n-1$ ступенем свободи.

З таблиці знаходимо $t_{0.9}(15) \approx 1.341$ і, підставивши в наведені вирази, одержимо надійний інтервал для математичного сподівання при рівні надійності $\gamma = 0.8$

$$(-0.471; 0.283).$$

Для визначення меж надійного інтервалу для дисперсії скористаємось формулами:

$$\left(\frac{ns^2}{X^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)}; \frac{ns^2}{X^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)}\right),$$

де $X^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n-1)$ і $X^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n-1)$ — квантилі розподілу X^2 з $n-1$ ступенем свободи порядку $\frac{1+\gamma}{2}$, $\frac{1-\gamma}{2}$, відповідно.

Знайшовши з таблиці значення $X^2_{0.9}(15) = 22.3$ і
$X^2_{0.1}(15) = 8.55$ та провівши необхідні обчислення, одержимо надійний інтервал для дисперсії даної нормально розподіленої випадкової величини при рівні надійності $\gamma = 0.8$

$$(0.908; 2.367).$$

Зауважимо, що мінімальне вибіркове значення $x_{min} = = -2.1$, а максимальне $x_{max} = 1.3$. Тому розіб'ємо інтервал $[-2.1; 1.3]$ на $\sqrt{n} = 4$ частин довжиною $h = 0,85$ і підрахуємо частоти попадання n_i вибіркових значень в одержані інтервали та знайдемо середини x_i^* цих інтервалів.

№	Інтервал	x_i^*	n_i/h
1	$[-2.1; -1.25)$	-1.675	3.529
2	$[-1.25; -0.4)$	-0.825	4.706
3	$[-0.4; 0.45)$	0.025	1.176
4	$[0.45; 1.4)$	0.875	9.412

Використовуючи дані таблиці побудуємо гістограму частот (рис. 2) та графік емпіричної функції розподілу (рис. 3)

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i: x_i^* < x} n_i.$$

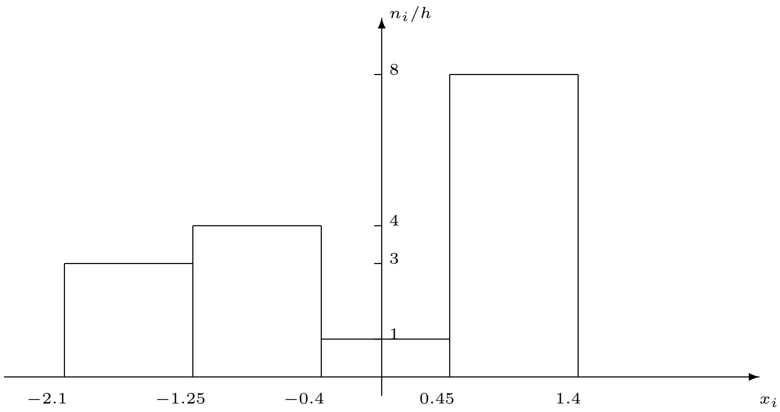


Рис. 2:

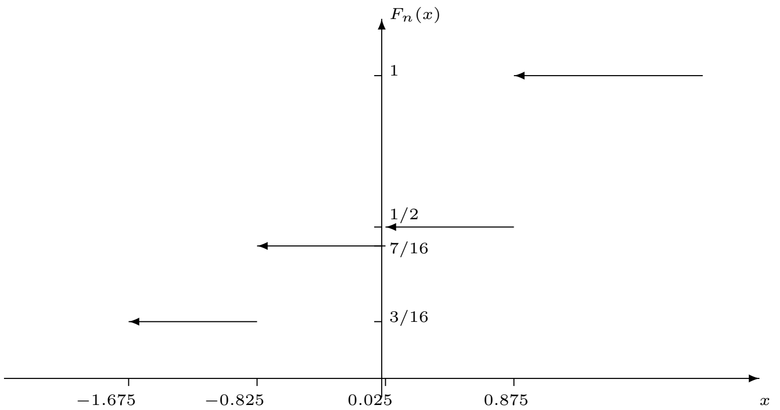


Рис. 3:

Приклад 7. Дана згрупована вибірка та знайдені деякі теоретичні частоти попадання в дані інтервали гіпотетичного розподілу. Використовуючи критерій χ^2, при рівні значущості 0.05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-0.22; -0.14)$	3	2.1
$[-0.14; -0.06)$	6	7.42
$[-0.06; 0.02)$	15	15.89
$[0.02; 0.1)$	25	20.16
$[0.1; 0.18)$	11	
$[0.18; 0.26)$	8	6.79
$[0.26; 0.34)$	2	1.82

Розв'язок.

Знайдемо середини даних інтервалів

$$x_i = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

де y_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$— послідовні кінці інтервалів.

$$x_1 = -0.18, \quad x_2 = -0.1, \quad x_3 = -0.2, \quad x_4 = 0.6,$$

$$x_5 = 0.14, \quad x_6 = 0.22, \quad x_7 = 0.3.$$

Обчислимо вибіркові середнє та дисперсію (скористаємось незміщеними оцінками):

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 n_i,$$

де $n = \sum_i n_i$. Тому $n = 70$, $\bar{x} = 0.057$, $s^2 = 0.012$

Знайдемо невідоме значення p_i при $i = 5$ — ймовірності попадання $N(\bar{x},\ s^2)$ -розподіленої випадкової величини в інтервал $[y_{i-1}; y_i]$:

$$p_i = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\, dt,$$

де $\alpha = \dfrac{y_{i-1} - \bar{x}}{s}$, $\beta = \dfrac{y_i - \bar{x}}{s}$.

Значення p_i можна шукати як за таблицею значень функції Лапласа, так і якимось наближеним методом.

В нашому випадку $p_5 = 0.217$ і відповідна теоретична частота $n \cdot p_5 = 0.217 \cdot 70 = 15.19$.

Якість результатів, одержаних за критерієм Пірсона, можна вважати прийнятною, якщо всі теоретичні частоти $n \cdot p_i > 5$. В нас теоретичні частоти, що відповідають крайнім інтервалам менші 5. Тому об'єднаємо їх із сусідніми.

Тоді кількість інтервалів стане рівною $k = 7 - 2 = 5$, нові частоти $\bar{n}_1 = 9$, $\bar{n}_2 = 15$, $\bar{n}_3 = 25$, $\bar{n}_4 = 11$, $\bar{n}_5 = 10$ і теоретичні частоти $n \cdot \bar{p}_1 = 9.52$, $n \cdot \bar{p}_2 = 15.89$, $n \cdot \bar{p}_3 = 20.16$, $n \cdot \bar{p}_4 = 15.19$, $n \cdot \bar{p}_5 = 8.61$.

Оскільки

$$\chi^2_{\text{В}} = \sum_i \frac{(\bar{n}_i - n \cdot \bar{p}_i)^2}{n \cdot \bar{p}_i} = 2.62 < 5.99 = \chi^2_{0.95}(k - l - 1),$$

де $l = 2$ — кількість оцінюваних за вибіркою параметрів розподілу, $\chi^2_{0.95}(m)$ — квантиль порядку 0,95 χ^2 -розподілу з m ступенями свободи (визначається за таблицею), то з надійністю 0.95 (при рівні значущості 0.05) гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини узгоджується з емпіричним розподілом вибірки.

Приклад 8. Знайти точкові оцінки параметрів лінійної регресії $y = ax + b$ за вибірковими даними.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.6	3.3	3.8	5.3	3.3	4.0	6.8	8.7	10.4	9.9

Розв'язок.

Розв'яжемо задачу методом найменших квадратів. Згідно цього метода оцінки параметрів лінійної регресії шукаємо з нормальної системи рівнянь

$$\begin{cases} a\sum\limits_i x_i^2 + b\sum\limits_i x_i = \sum\limits_i x_i y_i \\ a\sum\limits_i x_i + b\cdot n = \sum\limits_i y_i \end{cases}.$$

Оскільки $\sum\limits_i x_i^2 = 385$, $\sum\limits_i x_i = 55$, $\sum\limits_i x_i y_i = 390.95$, $\sum\limits_i y_i = 57.04$, $n = 10$, то нормальна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 385\cdot a + 55\cdot b = 390.95; \\ 55\cdot a + 10\cdot b = 57.04. \end{cases}$$

Розв'язавши її одержимо $a = 0.56$, $b = 0.94$, що є оцінками параметрів лінійної регресії $y = ax + b$.

4 Варіанти завдань контрольної роботи

Задача №1.

1.1. Телефонна книжка розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонні номери складаються з 7 цифр, причому всі комбінації цифр рівноймовірні, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$ чотири останні цифри телефонного номера однакові$\}$; $B = \{$ всі цифри різні$\}$.

1.2. 10 чоловіків і 10 жінок випадковим чином зайняли ряд із 20 місць. Знайти ймовірності таких подій:
$A = \{$жодних два чоловіки не сидять поруч$\}$, $B = \{$всі чоловіки сидять поруч$\}$.

1.3. 52 карти роздаються чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій:$A = \{$кожний гравець отримає туза$\}$; $B = \{$один з гравців отримає всі 13 карт однієї масті$\}$.

1.4. 52 карти роздаються чотирьом гравцям (кожному по 13 карт). Знайти ймовірності таких подій:$A = \{$двоє певних гравців не отримають жодного туза $\}$; $B = \{$всі тузи попадуть до одного з гравців$\}$.

1.5. В три вагони поїзда заходять дев'ять пасажирів. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$в перший вагон зайде три пасажири$\}$; $B = \{$в кожний вагон зайде по три пасажири$\}$.

1.6. Шість пасажирів зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му,...7-му поверхах, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$на другому, третьому і четвертому поверхах не вийде жоден пасажир}; $B = \{$троє пасажирів вийдуть на сьомому поверсі$\}$.

1.7. Шість пасажирів зайшли в ліфт на першому поверсі семиповерхового будинку. Вважаючи, що будь-який пасажир може з однаковою ймовірністю вийти на 2-му, 3-му,...7-му поверхах, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$на кожному поверсі вийде по одному пасажиру$\}$;
$B = \{$всі пасажири вийдуть на одному поверсі$\}$.

1.8. З 30 чисел (1, 2,..., 29, 30) випадково вибирається 10 різних чисел. Знайти ймовірності таких подій:
$A = \{$рівно 5 чисел ділиться на 3$\}$; $B = \{$5 чисел парних і 5 непарних, причому рівно одне число ділиться на 10$\}$.

1.9. 8 осіб займають місця з однієї сторони прямокутного стола. Кількість місць дорівнює 12. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$дві певні особи опиняться поруч$\}$;
$B = \{$три вільних місця будуть знаходитися поряд$\}$.

1.10. В скринці є 3 білі, 5 чорних і 7 червоних кульок. Навмання вибрали 5 кульок. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$вибрано принаймні одну червону кульку$\}$,
$B = \{$вибрано всі червоні кульки$\}$.

1.11. Із скриньки, що містить 10 кульок, з яких 6 білих і 4 чорних, навмання вибрано 3 кульки. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$всі вибрані кульки білі$\}$, $B = \{$серед вибраних кульок рівно дві білі$\}$.

1.12. До чотирьохстороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Кожний автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один з маневрів на перехресті: розвернутись і поїхати назад, поїхати прямо, наліво або направо.Через деякий час всі автомобілі покинули перехрестя. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$всі автомобілі поїдуть однією і тією ж вулицею$\}$; $B = \{$певною вулицею поїде три автомобілі$\}$.

1.13. До чотирьохстороннього перехрестя з кожної сторони під'їхало по одному автомобілю. Кожний автомобіль може з однаковою ймовірністю здійснити один з маневрів на перехресті: розвернутись і поїхати назад, поїхати прямо, наліво або направо.Через деякий час всі автомобілі покинули перехрестя. Знайти ймовірності таких подій: $A = \{$кожною з чотирьох вулиць поїде рівно один автомобіль$\}$; $B = \{$принаймні однією з вулиць не поїде жоден з автомобілів$\}$.

1.14. На п'яти карточках записані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карточок і розкладуванні в порядку витягування зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$з'виться число, що містить хоча б одну з цифр 2 або 3$\}$, $B = \{$з'явиться число, що не містить цифри 3$\}$.

1.15. На п'яти карточках записані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карточок і розкладуванні в порядку витягування зліва направо. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$одержане число складається з послідовних цифр$\}$,
$B = \{$з'явиться парне число$\}$.

1.16. Із колоди в 52 карти витягують навмання 6 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$всі вибрані карти бубнової масті$\}$, $B = \{$всі вибрані карти однієї масті$\}$.

1.17. З множини всіх послідовностей довжини 10, що складається з цифр 0, 1, 2, випадково вибирається одна. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$послідовність містить рівно 6 нулів, причому 2 з них знаходяться на кінцях послідовності$\}$; $B = \{$послідовність містить рівно 5 одиниць$\}$.

1.18. Числа 1, 2,..., 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$числа 1 і 2 стоять поруч і в порядку зростання$\}$, $B = \{$числа 3, 6 і 9 розміщені поруч в довільному порядку$\}$.

1.19. Числа 1, 2,..., 9 записуються у випадковому порядку. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$на парних місцях стоять парні числа$\}$, $B = \{$сума кожних двох чисел, що стоять на однаковій відстані від кінців, дорівнює 10$\}$.

1.20. Яка ймовірність того, що п'ятизначний номер випадково взятого автомобіля в великому місті:$A = \{$має всі цифри різні $\}$; $B = \{$має тільки дві однакові цифри$\}$.

1.21. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 людей $A = \{$випадають на різні місяці року$\}$; $B = \{$випадають на один місяць року$\}$.

1.22. Колода з 36 карт добре перемішана (тобто всі можливі варіанти розташування карт рівноймовірні). Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$чотири тузи розташовані поряд$\}$; $B = \{$місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з кроком 7$\}$.

1.23. Кидається 6 гральних кубиків. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$випаде 3 одиниці, дві трійки і одна шістка $\}$; $B = \{$випадуть різні цифри$\}$.

1.24. 10 варіантів контрольної роботи, написані кожний на окремій карточці, змішуються і розподіляються довільним чином серед восьми студентів, що сидять в одному ряду, причому кожний отримує один варіант. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$варіанти з номерами 1, 2 залишаться невикористаними $\}$; $B = \{$варіанти 1 і 2 дістануться студентам, що сидять поруч$\}$.

1.25. Кидають 10 однакових гральних кубиків. Обчислити ймовірності наступних подій: $A = \{$на жодному з кубиків не випаде 6 очок$\}$; $B = \{$хоча б на одному кубику випаде 6 очок$\}$.

1.26. Телефонна книжка розкривається навмання і вибирається випадковий номер телефону. Вважаючи, що телефонні номери складаються з 7 цифр, причому всі комбінації цифр рівноймовірні, знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$номер починається з цифри 5$\}$; $B = \{$номер містить три цифри 5, дві цифри 1 і дві цифри 2$\}$.

1.27. Із колоди в 52 карти витягують навмання 6 карт. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$ серед вибраних карт виявиться хоча б один туз$\}$, $B = \{$буде отримано наступний склад карт: валет, дама і два королі$\}$.

1.28. 7 яблук, 3 апельсина і 5 лимонів розкладаються випадковим чином в три пакета, але так, щоб в кожному була однакова кількість фруктів. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$в кожному з пакетів по одному апельсину$\}$; $B = \{$випадково вибраний пакет не містить апельсинів$\}$.

1.29. 12 осіб, серед яких є C і D шикуються в шеренгу довільним чином. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$ C і D будуть стояти поруч$\}$, $B = \{$між C і D буде знаходитись рівно 4 особи$\}$.

1.30. Вибрано п'ять різних цифр. Знайти ймовірності наступних подій: $A = \{$вибрана цифра 1$\}$, $B = \{$вибрані тільки парні цифри$\}$.

Задача №2.

2.1. Прилад, що знаходиться на борту літака може працювати в двох режимах: в умовах нормального крейсерського польоту та в умовах перевантаження. Крейсерський режим має місце протягом 80% всього часу польоту, умови перевантаження — протягом 20% всього часу польоту. Ймовірність відмови приладу під час польоту в нормальному режимі дорівнює 0.1, а в умовах перевантаження — 0.4. Обчислити надійність приладу (ймовірність безвідмовної роботи) за час польоту.

2.2. Два цехи штампують однотипні деталі. Перший цех дає 5% браку, другий — 10%. Для контролю відібрано 100 деталей з першого цеху та 300 з другого. Всі ці деталі змішали в одну партію і з неї навмання вибрали одну деталь. Яка ймовірність того, що вона бракована?
2.3. В продаж надходять телевізори трьох заводів. Продукція першого заводу містить 20% телевізорів з прихованим дефектом, другого — 10% і третього — 5%. Яка ймовірність купити якісний телевізор, якщо в магазин надійшло 30% телевізорів з першого заводу, 20% — з другого та 50% — з третього заводу?
2.4.

Три стрільця, ймовірності влучення яких при одному пострілі в мішень при незмінних умовах постійні та відповідно дорівнюють $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.6$, по одному разу стріляють в одну і ту ж мішень. Обчислити ймовірність події $A = \{$в мішені буде рівно два отвори$\}$.
2.5. В ящику є 20 тенісних м'ячів,серед них 15 нових і 5 вживаних. Для гри навгад вибираються два м'ячі і після гри повертаються назад в ящик. Потім для другої гри також навгад вибирають ще два м'ячі. Яка ймовірність того, що друга гра буде проводитись новими м'ячами?
2.6. Із 10 студентів,що прийшли здавати екзамен, два знають 20 білетів із 30, один тільки 15, а решта студентів знають всі 30 білетів. Екзаменатор навмання викликає одного із студентів. Яка ймовірність того, що він здасть екзамен?
2.7. Людині, що має четверту групу крові, можна перелити кров любої групи; людині з другою або третьою групою крові можна перелити кров або тієї ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна перелити лише кров першої групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% — другу, 20,9% — третю та 7,9% — четверту групи крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.
2.8. Програма екзамену містить 30 різних питань, з яких студент знає тільки 15. Для успішної здачі екзамену досить відповісти на два запропонованих питання або на одне з них і на додаткове питання. Яка ймовірність того, що студент успішно здасть екзамен?
2.9. З множини чисел $E = \{1, 2, ..., 10\}$ навгад послідовно і без повернення беруть два числа. Яка ймовірність того, що перше число більше від другого не менш ніж на 5?
2.10. Студент знає тільки 10 із 25 екзаменаційних білетів. В якому випадку шанси цього студента одержати знайомий білет більші: коли він підходить брати білет першим чи другим?
2.11. В трьох скриньках лежать білі та чорні кульки. У першій скриньці — 3 білі і одна чорна, у другій — 6 білих і 4 чорних, у третій — 9 білих і одна чорна. З навмання взятої скриньки виймають одну кульку. Знайти ймовіність того, що вона біла.
2.12. В першому ящику 5 білих і 10 чорних кульок, в другому — 3 білих і 7 чорних кульок. З другого ящика в перший переклали кульку, а потім з першого ящика витягли навмання одну кульку. Визначити ймовірність того, що витягнута кулька — біла.
2.13. В групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 легкоатлети. Ймовірності виконання норми майстра спорту для кожної групи спортсменів відповідно дорівнюють 0.9, 0.8, 0.75. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний спортсмен виконає норму майстра спорту.
2.14. 10 студентів розв'язують задачу. Двоє з них вчаться на 5, п'ятеро на 4, троє на 3. Ймовірність розв'язати задачу для кожного студента з цих груп дорівнює відповідно 0.95, 0.8, 0.5. Знайти ймовірність того, що задача буде розв'язана одним із студентів.

2.15. Маємо три скриньки. У першій міститься 8 білих і 2 чорних кульки, у другій — 5 білих і 5 чорних, у третій — 2 білих і 8 чорних. Навмання підкидають гральний кубик. Якщо випаде на грані число кратне 2, то навмання беруть дві кульки з першої скриньки, якщо випаде число 5 — дві кульки з другої скриньки, і якщо випаде число, яке не буде кратним 2 і не дорівнює 5 — дві кульки з третьої скриньки. Знайти ймовірність появи двох білих кульок в такому експерименті.

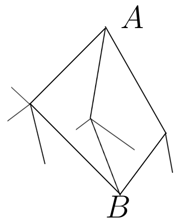
2.16. Два заводи виготовляють однакові реактиви, причому 8% пачок реактивів першого і 6% пачок реактивів другого заводу мають більшу від допустимої кількість домішок. На складі є 200 пачок реактивів виготовлених першим заводом і 300 пачок виготовлених другим заводом. Яка ймовірність того, що навмання вибрана пачка реактивів містить допустиму кількість домішок?

2.17. Перевіряється партія виробів, серед яких 10% бракованих. При перевірці бракований виріб виявляється з ймовірністю 0,92, а якісний виріб бракується з ймовірністю 0,06. Яка ймовірність того, що навмання вибраний виріб буде визнано бракованим?

2.18. Є три однакові на вигляд коробки. В першій коробці 10 білих і 5 чорних кульок, в другій — 8 білих і 8 чорних куль, а в третій — тільки чорні кульки. Навмання вибирається коробка, а в ній кулька. Яка ймовірність, що вона біла?

2.19. Проводяться три незалежні постріли снарядами по цілі з ймовірністю влучання 0,6 кожен. Ціль знищується з ймовірністю 0,5 при влученні одним снарядом, з ймовірністю 0,9 при влученні двома снарядами і з ймовірністю 1 — при влученні трьох снарядів. Знайти ймовірність знищення цілі.

2.20. Мандрівник виходить з пункту A і на кожному роздоріжжі вибирає навмання одне з можливих продовжень шляху (не повертаючись назад). Яка ймовірність того, що він попаде в пункт B?



2.21. Студент приходить на лекцію з ймовірністю 0,8. Лекція читається на потоці з трьох груп. Залежно від настрою лектор робить перекличку в усіх групах з ймовірністю 0,3, з тією ж ймовірністю тільки в одній, навмання взятій групі, і з ймовірністю 0,4 взагалі переклички не робить. Яка ймовірність, що у випадково взятий день, коли ця лекція є в розкладі, буде зафіксована відсутність студента на лекції?

2.22. Дві сестри ходять в ліс по чорниці з маленьким відерком. Разом вони завжди набирають повне відерко, старша сестра сама може набрати відерко в 40% випадків, а молодша — тільки в 5%. Мама може залишити незалежно одну від одної вдома з ймовірністю $2/3$. Яка ймовірність того, що у випадковий день буде назбирано повне відро чорниць?

2.23. Пасажир може звернутися за квитком в одну із трьох кас. Ймовірності звертання в кожну касу залежать від місця розташування каси і дорівнюють відповідно 0,25, 0,35, 0,4. Ймовірність того, що на момент звернення пасажира квитки в касі будуть розпродані, дорівнюють відповідно 0,65, 0,8, 0,9. Знайти ймовірність того, що пасажир купить квиток.

2.24. З повного набору кісточок доміно навмання без повернення беруть дві кісточки. Визначити ймовірність того, що другу кісточку можна прикласти до першої (за правилами доміно).

2.25. З трамвайного парку у випадковому порядку виходять 4 трамваї маршруту №1 і 8 трамваїв маршруту №2. Знайти ймовірність того, що трамвай, який вийшов на лінію за чергою другим, прямує маршрутом №1.

2.26. Іван та Петро — близькі друзі. Найчастіше (в 70% випадків) вони разом роблять домашнє завдання з математики і з ймовірністю 0,8 воно в них виконано правильно. Але часом завдання робить сам Іван (у 20% випадків), чи сам Петро (в 10% випадків), а інший просто переписує. Іван виконує завдання правильно з ймовірністю 0,6, а Петро — з ймовірністю 0,1. Яка ймовірність того, що на час перевірки у чопців буде правильно виконане завдання?

2.27. Кількість вантажних машин, які проходять шосе відноситься до кількості легкових машин, як 3 до 2. Ймовірність того, що машина під'їде на заправку для вантажних машин дорівнює 0.1, а для легкових 0.2. Знайти ймовірність того, що до бензоколонки під'їде машина.

2.28. З 10 деталей 4 пофарбовані. Ймовірність того, що пофарбована деталь важча норми, дорівнює 0.3, а для непофарбованої деталі ця ймовірність дорівнює 0.1. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь важча норми.

2.29. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0.8 надходить суміш корисного сигналу з шумом, а з ймовірністю 0.2 — тільки шум. Якщо надходить корисний сигнал з шумом, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0.7; якщо тільки шум, то — з ймовірністю 0.3. Знайти ймовірність того, що пристрій зареєструє наявність деякого сигналу.

2.30. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0.1. Ймовірність виходу з ладу прилада за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Знайти ймовірність того, що під час випробування протягом часу T прилад працював безвідмовно.

Задача №3.

3.1. Автомашини випускаються трьома заводами в кількостях 5000, 3000, 4000 за рік, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0.05, 0.1, 0.2. Куплена автомашина виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі?

3.2. Кількість вантажних машин, які проходять шосе, відноситься до кількості легкових машин, як 3 і 2. Ймовірність того, що машина під'їде на заправку для вантажних машин дорівнює 0.1, а для легкових 0.2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що вона вантажна.

3.3. В скриньці лежать три кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі чотири припущення про початковий склад скриньки рівноможливі. Три рази вийняли зі скриньки по одній кулі з поверненням, причому перша куля виявилиси чорною, решта — білі. Знайти апостеріорні ймовірності різних складів скриньки.

3.4. З 10 деталей 4 пофарбовані. Ймовірність того, що пофарбована деталь важча норми, дорівнює 0.3, а для непофарбованої деталі ця ймовірність дорівнює 0.1. Взята навмання деталь виявилась важчою норми. Знайти ймовірність того, що вона пофарбована.

3.5. В спеціалізовану лікарню поступають в середньому 50% з захворюванням A, 30% — B, 20% — C. Ймовірність повного вилікування для A дорівнює 0.7, B — 0.8, C — 0.9. Пацієнта виписано здоровим. Знайти ймовірність того, що він хворів B.

3.6. Продуктивність першого автомата вдвічі перевищує продуктивність другого. Перший автомат в середньому дає 60% деталей, другий — 84% деталей відмінної якості. Навмання взята деталь виявилась відмінної якості. Знайти ймовірнсіть того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.

3.7. В коробці знаходяться два зовні однакові гральні кубики: один правильний, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; другий неправильний. При підкиданні неправильного кубика одиниця з'являється з ймовірністю $1/9$. Навмання вибирають із коробки гральний кубик і підкидають; в результаті випало 1 очко. Знайти ймовірність того, шо було підкинуто правильний кубик.

3.8. В скринці знаходиться кулька невідомого кольору — з рівною ймовірністю біла або чорна. В скриньку кладуть білу кульку і після перемішування навгад витягують одну кульку. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в скриньці залишилась біла кулька?

3.9. На вхід радіолокаційного пристрою з ймовірністю 0.8 надходить суміш корисного сигналу з шумом, а з ймовірністю 0.2 — тільки шум. Якщо надходить корисний сигнал з шумом, то пристрій реєструє наявність деякого сигналу з ймовірністю 0.7; якщо тільки шум, то — з ймовірністю 0.3. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність деякого сигналу. Знайти ймовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

3.10. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0.2. Ймовірність виходу з ладу приладу за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Під час випробування протягом часу T була зареєстрована відмова приладу. Знайти ймовірність події $A = \{$бракований один вузол$\}$.

3.11. Прилад складається із двох послідовно включених вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу T) першого вузла дорівнює 0.9, другого — 0.8. За час випробування приладу на протязі часу T зареєстрована відмова приладу. Знайти ймовірність події $A = \{$відмовив тільки перший вузол$\}$.

3.12. Прилад складається з трьох вузлів, ймовірність наявності браку в яких одна і та ж і дорівнює 0.1. Ймовірність виходу з ладу приладу за деякий час T дорівнює відносній кількості бракованих вузлів. Під час випробування протягом часу T прилад працював безвідмовно. Знайти ймовірність події $A = \{$браковані два вузли$\}$.

3.13. Прилад складається із двох послідовно включених вузлів. Надійність (ймовірність безвідмовної роботи на протязі часу T) першого вузла дорівнює 0.9, другого — 0.8. За час випробування приладу на протязі часу T зареєстрована відмова приладу. Знайти ймовірність події $A = \{$відмовили обидва вузли$\}$.

3.14. В коробці знаходяться два зовні однакові гральні кубики: один правильний, з однаковими ймовірностями випадання всіх шести цифр; другий неправильний, з нерівномірним розподілом маси по об'єму. При підкиданні неправильного кубика шестірка появляється з ймовірністю $1/3$, одиниця — з ймовірністю $1/9$, решта цифри випадають з однаковими ймовірностями. Навгад вибирається із коробки гральний кубик і підкидається; в результаті випало 6 очок. Знайти ймовірність того, що було підкинуто правильний кубик.

3.15. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 1:4:5, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0.05, 0.01, 0.2. Куплений прилад виявився якісним. Яка ймовірність того, що цей прилад був виготовлений другим заводом?

3.16. Однотипні прилади випускаються трьома заводами в кількісному співвідношенні 2:3:5, причому ймовірності браку для цих заводів відповідно дорівнюють 0.05, 0.1, 0.2. Куплений прилад виявився бракованим. Яка ймовірність того, що цей прилад був виготовлений на першому заводі?

3.17.

Кількість бракованих мікросхем з 10 апріорі вважається рівноможливим від 0 до 2. Навмання вибрані 3 мікросхеми виявились якісними. Яка ймовірність того, що всі мікросхеми якісні?

3.18. В групі із 25 чоловік 10 (відмінно підготовлені) знають всі 25 питань програми екзамену, 7 (добре підготовлені) знають 20, 5 (задовільно підготовлені) знають 15 і 3 (незадовільно підготовлені) знають тільки 10 питань. Викликаний навгад студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений незадовільно.

3.19. В групі із 25 чоловік 10 (відмінно підготовлені) знають всі 25 питань програми екзамену, 7 (добре підготовлені) знають 20, 5 (задовільно підготовлені) знають 15 і 3 (незадовільно підготовлені) знають тільки 10 питань. Викликаний навгад студент відповів на два задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений відмінно чи добре.

3.20. Перевіряється партія виробів, серед яких 10% бракованих. При перевірці бракований виріб виявляється з ймовірністю 0,92, а якісний виріб бракується з ймовірністю 0,06. Нехай виріб забракований в процесі перевірки. Яка ймовірність того, що він дійсно бракований?

3.21. Два заводи виготовляють однакові реактиви, причому 8% пачок реактивів першого і 6% пачок реактивів другого заводу мають більшу від допустимої кількість домішок. На складі є 2000 пачок реактивів виготовлених першим заводом і 3000 пачок виготовлених другим заводом. Нехай вибрана навмання пачка реактивів якісна. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому заводі?

3.22. Є три однакові на вигляд коробки. В першій коробці 10 білих і 5 чорних кульок, в другій — 8 білих і 8 чорних куль, а в третій — тільки чорні кульки. Навмання вибирається коробка, а в ній кулька. Вона виявилась білою. Яка ймовірність, що вибрали першу коробку?

3.23. Проводяться три незалежні постріли снарядами по цілі з ймовірністю влучання 0,6 кожен. Ціль знищується з ймовірністю 0,5 при влученні одним снарядом, з йвовірністю 0,9 при влученні двома снарядами і з ймовірністю 1 — при влученні трьох снарядів. Нехай ціль знищена. Знайти ймовірність того, що в неї влучив тільки один снаряд.

3.24. Студент приходить на лекцію з ймовірністю 0,8. Лекція читається на потоці з трьох груп. Залежно від настрою лектор робить перекличку в усіх групах з ймовірністю 0,3, з тією ж ймовірністю тільки в одній, навмання взятій групі, і з ймовірністю 0,4 взагалі переклички не робить. У випадково взятий день, коли ця лекція є в розкладі, була зафіксована відсутність студента на лекції. З якою ймовірністю викладач робив перекличку в усіх групах?

3.25. Дві сестри ходять в ліс по чорниці з маленьким відерком. Разом вони завжди набирають повне відерко, старша сестра сама може набрати відерко в 40% випадків, а молодша — тільки в 5%. Мама може залишити незалежно одну від одної вдома з ймовірністю 2/3. У один з випадково взятих днів було назбирано повне відро чорниць. Яка ймовірність того, що його назбирала сама старша сестра?

3.26. Пасажир може звернутися за квитком в одну із трьох кас. Ймовірності звертання в кожну касу залежать від місця розташування каси і дорівнюють відповідно 0,25, 0,35, 0,4. Ймовірність того, що на момент звернення пасажира квитки в касі будуть розпродані, дорівнюють відповідно 0,65, 0,8, 0,9. Пасажир купив квиток. Яка ймовірність того, що він купив його в першій касі?

3.27. Іван та Петро — близькі друзі. Найчастіше (в 70% випадків) вони разом роблять домашнє завдання з математики і з ймовірністю 0,8 воно в них виконано правильно. Але часом завдання робить сам Іван (у 20% випадків), чи сам Петро (в 10% випадків), а інший просто переписує. Іван виконує завдання правильно з ймовірністю 0,1, а Петро — з ймовірністю 0,6. У випадково вибраний день виявилось, що хлопці правильно виконали завдання. Яка ймовірність того, що вони його виконували разом?

3.28. В ящику є 20 тенісних м'ячів, серед них 15 нових і 5 вживаних. Для гри навгад вибираються два м'ячі і після гри повертаються назад в ящик. Потім для другої гри також навгад вибирають ще два м'ячі. Друга гра проводилась новими м'ячами. Яка ймовірність того, що і перша гра проводилась новими м'ячами?

3.29.

З трамвайного парку у випадковому порядку виходять 4 трамваї маршруту №1 і 8 трамваїв маршруту №2. Другим за чергою на маршрут вийшов трамвай маршруту №2. Знайти ймовірність того, що першим з парку вийшов трамвай маршруту №1.

3.30. Програма екзамену містить 30 різних питань, з яких студент знає тільки 15. Для успішної здачі екзамену досить відповісти на два запропонованих питання або на одне з них і на додаткове питання. Студент здав екзамен. Яка ймовірність того, що йому було задано два питання?

Задача №4.

В пункті а) описані випадковий експеримент і пов'язана з ним випадкова величина ξ, в пункті б) задана щільність $f_\xi(x)$ розподілу випадкової величини ξ. Знайти функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання $\mathbf{M}\xi$, дисперсію $\mathbf{D}\xi$.

4.1.

а) Двічі підкидають гральний кубик. ξ — сума очок, що випали.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

4.2.

а) Шість разів підкидається правильна монета. ξ — модуль різниці числа появ герба і числа появ цифри.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sin^2 x, & \text{якщо } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4.3.

а) Четверо студентів складають іспит з теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший із них складе іспит, дорівнює 0,9; для другого і третього ця ймовірність дорівнює 0,8; а для четвертого — 0,7. ξ — число студентів, котрі сладуть іспит.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{9}{16}} - x^2, & \text{якщо } |x| \le \sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \sqrt[3]{\frac{3}{4}}. \end{cases}$$

4.4.

а) Серед п'яти однотипних телевізорів є лише один справний. Щоб на нього потрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відставляють його окремо від решти. Перевірка триває до появи справного телевізора. ξ — кількість перевірених телевізорів.

$$\text{б)}\, f_\xi(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

4.5.

а) Гральний кубик підкидають 3 рази. ξ — кількість появ шести очок.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{\frac{3}{2}}\sqrt{x}, & \text{якщо } x \in \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}\right). \end{cases}$$

4.6.

а) Із скриньки, в якій лежать 4 білих та 6 чорних кульок беруть навмання 3 кульки. ξ — кількість білих кульок серед них.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \in (0; 1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 1). \end{cases}$$

4.7.

а) Садівник посадив три саджанці: одну яблуню, одну грушу й одну вишню. Ймовірність того, що саджанець яблуні прийметься, дорівнює 0,7. Для саджанців груші та вишні ця ймовірність становить відповідно 0,9 і 0,8. ξ — число саджанців, які приймуться.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

4.8.

а) Чотири однакові електролампочки тимчасово викрутили з відповідних патронів і поклали в ящик. Потім із ящика навмання взяли по одній лампочці і навмання вкрутили в патрони. ξ — число лампочок, які вкручені в ті патрони, з яких вони були викручені.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & \text{якщо } |x| \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4.9.

а) Випробовується 3 прилади. Ймовірність відмови кожного приладу не залежить від відмови інших і дорівнює 0,1. ξ — кількість приладів, що відмовили.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } |x| \le 1; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}.$$

4.10.

а) Виконують три незалежні постріли в мішень, ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0.8. ξ — кількість влучень.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{64}(x+1)^2, & \text{якщо } x \in (-1; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-1; 3). \end{cases}$$

4.11.

а) На шляху машини 4 світлофори. Кожний з них з ймовірністю 0,5 або дозволяє або забороняє машині подальший рух. ξ — число світлофорів, пройдених машиною без зупинки.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(1 - \cos x), & \text{якщо } x \in (0; \pi); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; \pi). \end{cases}$$

4.12.

а) Мішень складається з трьох концентричних кілець. Попадання в центральний круг оцінюється в 4 очки, в середнє кільце — 3 очки, в крайнє — 2 очки і промах — в 0 очок. Відповідні ймовірності попадань в центральний круг, середнє кільце, крайнє кільце і промах дорівнюють 0.4, 0.3, 0.2, 0.1. ξ — сума вибитих очок в результаті двох пострілів.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

4.13.

а) Задана множина $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. ξ — число дільників навмання вибраного натурального числа з множини Ω.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (1; e); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; e). \end{cases}$$

4.14.

а) Два стрільці стріляють кожен в свою мішень і роблять незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність влучання для першого стрільця 0.85, для другого 0.9. $\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 — кількість влучань першого стрільця, ξ_2 — кількість влучань другого стрільця.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & \text{якщо } x \in (-2; 7); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-2; 7). \end{cases}$$

4.15.

а) Є 3 транзистори, кожен з яких з ймовірністю 0.1 має дефект. Транзистор вмикають і, якщо він має дефект, то замінюють іншим. ξ — кількість транзисторів, які будуть випробувані.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{36}(x+1)(x-5), & \text{якщо } x \in (-1; 5); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (-1; 5). \end{cases}$$

4.16.

а) Є 3 ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані однотипні деталі, у другому — 8 стандартних і 2 браковані, у третьому — 5 стандратних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. ξ — число появ стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 3\sin 3x, & \text{якщо } x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

4.17.

а) Є партія з 10 виробів, серед яких 3 бракованих. Навмання беруть 4 вироби. ξ — кількість бракованих серед них.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & \text{якщо } x \in (1; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 2). \end{cases}$$

4.18.

а) Стріляють в ціль три рази. Влучання при окремих пострілах — незалежні події з ймовірністю $\frac{2}{3}$. ξ — кількість влучань при трьох пострілах.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

4.19.

а) Підкидають два гральних кубики.
$\xi = \xi_1 - \xi_2$, де ξ_1 — число, яке випало на першому кубику, ξ_2 — на другому кубику.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{7}\cos\frac{2}{7}x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{7}{4}\pi\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{7}{4}\pi\right). \end{cases}$$

4.20.

а) З ящика, в якому лежать 2 білі та 4 чорні кульки беруть навмання 3 кульки. ξ — різниця між кількістю білих та чорних кульок серед них.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{4}{9}(x^3 - x), & \text{якщо } x \in (1; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 2). \end{cases}$$

4.21.

а) В яшику є 6 білих і 4 чорних кульки. З ящика 5 разів підряд беруть кульку, при цьому кожний раз вийняту кульку повертають в ящик і кульки перемішують. ξ — кількість вийнятих білих кульок.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{26}(x^4 - 1), & \text{якщо } x \in (1; 2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1; 2). \end{cases}$$

4.22.

а) В скриньці є кульки з номерами від 1 до 4. Вийняли дві кульки. ξ — сума номерів кульок.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(3x - x^2), & \text{якщо } x \in (0; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; 3). \end{cases}$$

4.23.

а) В мішень стріляють тричі. Ймовірність влучання в мішень при кожному пострілі дорівнює 0.3. ξ — кількість влучань.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} 3(x - 2)^2, & \text{якщо } x \in (2; 3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (2; 3). \end{cases}$$

4.24.

а) Маємо чотири електролампочки, кожна з яких має дефект з ймовірністю 0.1. Послідовно беруть по одній лампочці, вгвинчують у патрон і вмикають електричний струм. ПІд час вмикання струму лампочка з дефектом перегорить, і її замінять на іншу. ξ — число лампочок, які будуть випробувані.

$$\text{б)} f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{якщо } x \in (0; +\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0; +\infty). \end{cases}$$

4.25.

а) Спортсмен на змаганнях має чотири кулі і стріляє в ціль до першого влучання. Ймовірність влучання при одному пострілі дорівнює 0.7. ξ — число промахів.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{4}x^3, & \text{якщо } x \in (0;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;2). \end{cases}$$

4.26.

а) Ймовірність того, що футболіст реалізує одинадцятиметровий штрафний удар дорівнює 0.9. Футболіст виконав три такі удари. ξ — число реалізованих шрафних.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} 6(x - x^2), & \text{якщо } x \in (0;1); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;1). \end{cases}$$

4.27.

а) Один раз кинули три однакові гральні кубики. ξ приймає значення 1, якщо хоча б на одному кубику випаде цифра 6, приймає значення 0, якщо цифра 6 не випала на жодному кубику, але хоча б на одній з граней з'явилась цифра 5; і приймає значення -1 в інших випадках.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(2 - x)^2, & \text{якщо } x \in (0;2); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;2). \end{cases}$$

4.28.

а) Тричі підкидається гральний кубик. $\xi = \xi_1 - -\xi_2$, де ξ_1 — число появ шести очок, ξ_2 — число появ непарної цифри.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 1), & \text{якщо } x \in (1;3); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (1;3). \end{cases}$$

4.29.

а) Стрілець має 5 куль і стріляє в мішень до першого влучання. Ймовірність влучання при кожному пострілі дорівнює 0.7. ξ — число витрачених куль.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{якщо } x \in (0;+\infty); \\ 0, & \text{якщо } x \notin (0;+\infty). \end{cases}$$

4.30.

а) Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, величина стала і дорівнює 0.8. ξ — число верстатів, які потребують уваги за певний проміжок часу.

$$б) f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin\frac{2}{3}x, & \text{якщо } x \in \left(0; \frac{3}{2}\pi\right); \\ 0, & \text{якщо } x \notin \left(0; \frac{3}{2}\pi\right). \end{cases}$$

Задача №5.

В пункті а) задано закон розподілу випадкового вектора $(\xi,\, \eta)$, в пункті б) задана щільність розподілу $f_{\xi\eta}(x, y)$ випадкового вектора $(\xi,\, \eta)$. Знайти коефіцієнти кореляції $r_{\xi\eta}$ в кожному з пунктів.

5.1.

а)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0
1	0.2	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.2.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
1	0	0.2	0.1
2	0.2	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{28}(xy+y^2), & \text{при } 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.3.

а)

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
2	0.2	0.1	0
3	0.3	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{120}{11}(xy+x^2), & \text{при } 0 \le x \le 1; x^2 \le y \le x; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.4.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
1	0.1	0.2	0
2	0.3	0.3	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{120}{11}(1+xy)x, & \text{при } 0 \le x \le 1; x \le y \le \sqrt{x}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.5.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	-1	0
0	0.2	0.3	0
1	0.2	0.1	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.6.

а)

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
1	0.2	0.3	0.1
2	0	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 3(x+y), & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.7.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
2	0.1	0.3	0.2
3	0.2	0.1	0.1

$$\text{б)} f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{5}(xy+y^2), & \text{при } x \geq 0; 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.8.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0.2
0	0.1	0.2	0.2

$$\text{б)} f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \cos x \cos y, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.9.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-2	0.3	0.1	0.3
-1	0.1	0	0.2

$$\text{б)} f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x+y)^2, & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.10.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
0	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0	0.2

$$\text{б)} f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(2y+x), & \text{при } 0 \leq x \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.11.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
0	0.1	0.3	0.2
1	0.2	0	0.2

$$\text{б)} f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.12.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
1	0.3	0.1	0.2
2	0.2	0	0.2

$$\text{б)} f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x-y), & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.13.

а)

$\eta \backslash \xi$	2	3	4
-1	0.2	0.3	0.2
1	0.1	0	0.2

б) $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{при } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

5.14.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	4
2	0.1	0.3	0.2
3	0.1	0	0.3

б) $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2+y^2), & \text{при } x^2+y^2 \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

5.15.

а)

$\eta \backslash \xi$	-3	-2	1
-1	0.2	0.3	0.2
2	0.1	0	0.2

б) $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

5.16.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	0	3
-1	0.2	0.1	0
1	0.2	0.3	0.2

б) $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} - x^2 - y^2, & \text{при } x^2+y^2 \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

5.17.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	5
-1	0	0.1	0.2
3	0.2	0.3	0.2

б) $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}(1-\sqrt{x^2+y^2}), & \text{при } x^2+y^2 \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

5.18.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
2	0.2	0.1	0
3	0.5	0.1	0.1

б) $f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x+y), & \text{при } -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

5.19.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
1	0.1	0.2	0
3	0.1	0.5	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x-y), & \text{при } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.20.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	-1	2
-2	0.2	0.3	0
1	0.2	0.1	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 2(y+2x), & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x+y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.21.

а)

$\eta \backslash \xi$	-1	1	3
1	0.1	0.4	0.1
2	0	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 3(x^2+y^2), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.22.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
2	0.1	0.4	0.2
3	0.1	0.1	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \cos(2x+y), & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{2} \le y \le 0; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.23.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-1	0.1	0.1	0.2
2	0.1	0.3	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & \text{при } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.24.

а)

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
-2	0.3	0.1	0.4
-1	0.1	0	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x^3y+x), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.25.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-2	0.1	0.5	0.2
1	0.1	0	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{5}(x^3y + x), & \text{при } 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.26.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	2	4
-1	0.1	0.1	0.2
1	0.2	0.2	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(2y + x), & \text{при } 0 \le y \le x \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.27.

а)

$\eta \backslash \xi$	-2	1	2
1	0.4	0.1	0.2
3	0.2	0	0.1

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} 8(xy + y^2), & \text{при } x \ge 0; y \ge 0; x + y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.28.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
-1	0.1	0.4	0.2
1	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{5}(x + y^2), & \text{при } 0 \le x \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.29.

а)

$\eta \backslash \xi$	1	3	5
2	0.2	0.2	0.2
3	0.1	0	0.3

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \sin(2x + y), & \text{при } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}; 0 \le y \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

5.30.

а)

$\eta \backslash \xi$	-3	-2	1
-1	0.1	0.5	0.1
2	0.1	0	0.2

$$б) f_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{12}{7}(x + x^2y^3), & \text{при } 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача №6.

В задачах 1 — 30 за даною вибіркою з нормально розподіленої генеральної сукупності знайти:

1. об'єм вибірки n;
2. розмах варіації;
3. медіану;
4. точкову оцінку математичного сподівання (вибіркове середнє);
5. точкову оцінку дисперсії (вибіркову дисперсію);
6. інтервальну оцінку математичного сподівання при рівні надійності γ. Розглянути два випадки:
   (a) дисперсія відома і дорівнює σ^2;
   (b) дисперсія невідома;
7. інтервальну оцінку дисперсії при рівні надійності γ;
8. побудувати полігон частот та емпіричну функцію розподілу, розбивши варіаційний ряд на $\sqrt{n}$ рівних частин.

6.1. -1.6, -0.7, -0.1, -0.1, -0.2, -1.9, -0.3, -0.7, 0.4, 0.7, 0.7, 1.6, -0.5, -0.5, 1.7, -0.2, -0.6, -1.0, 0.5, 0.7, -1.7, 0.7, -0.2, 0.6, -0.6;

$$\gamma = 0.9, \quad \sigma = 1.$$

6.2. -2.9, 0.9, -1.2, 3.6, 1.3, -0.5, -0.5, 2.5, 0.1, -1.6, 2.2, 1.3, -5.1, 1.5, 1.5, 1.2, 1.3, -1.1, -0.1, 1.1, -1.2, 2.5, -0.2, 0.0, 0.9, -1.5, 1.9, -1.0, 1.1, -1.2, -1.4, 1.1, -1.1, -4.6, -1.5, 3.2;

$$\gamma = 0.91, \quad \sigma = 2.$$

6.3. 1.1, 1.3, 0.3, 2.0, -0.2, 0.9, 0.8, 1.5, 1.2, -0.8, 0.2, 0.9, -0.1, 1.1, 1.5, 0.7, 1.4, 1.3, 0.8, 0.9, 2.1, 1.5, 2.9, 1.0, 0.6;

$$\gamma = 0.92, \quad \sigma = 1.$$

6.4. -3.1, 1.3, 3.0, 1.5, 0.6, -1.4, -1.3, 0.8, 2.4, 2.3, -3.0, 1.3, 2.0, 2.4, 2.6, 2.0, 0.7, 0.8, -2.1, -4.2, 0.2, -0.3, -2.5, 3.8, 1.9, 1.1, 1.8, 0.9, 1.4, 0.8, 5.4, 2.3, 2.2, 1.1, -1.3, 0.9;

$$\gamma = 0.93, \quad \sigma = 2.$$

6.5. 1.6, 0.9, 1.2, 1.4, 1.2, 2.8, 0.7, 0.9, 1.1, 0.6, 1.8, 1.8, 1.1, 2.4, 2.7, 2.5, 3.0, 3.1, 1.7, 3.5, 2.4, 1.8, 0.0, 2.3, 2.3;

$$\gamma = 0.94, \quad \sigma = 1.$$

6.6. -1.2, -1.2, 1.4, 2.8, 4.7, 2.1, -0.1, -1.1, 0.4, 1.8, -0.3, -2.7, 5.4, 2.1, 5.3, 1.0, 1.3, 2.9, 3.4, 1.0, 3.6, 4.3, 4.3, 0.3, 3.7, 0.3, 4.5, -0.1, 3.3, 2.9, -1.3, 2.9, 3.8, 0.1, 1.4, 2.3;

$$\gamma = 0.95, \quad \sigma = 2.$$

6.7. 2.4, 4.0, 1.4, 2.2, 2.9, 3.8, 3.4, 1.0, 3.5, 1.8, 3.8, 2.4, 3.0, 3.1, 4.0, 3.2, 2.5, 3.1, 1.5, 2.2, 4.0, 3.0, 3.0, 3.1, 2.5;

$$\gamma = 0.96, \quad \sigma = 1.$$

6.8. 3.7, 2.9, 3.9, 6.1, 4.5, −0.7, 3.0, 1.2, 0.9, 2.4, 4.0, 3.8, 0.2, 0.2, 1.5, 2.7, 4.0, 2.6, 6.0, −0.8, −0.2, −2.2, 2.0, 6.1, 3.1, 3.7, 2.0, 4.4, 5.5, 4.3, 2.6, −0.7, 6.5, 3.7, 0.3, −0.3;

$$\gamma = 0.97, \quad \sigma = 2.$$

6.9. 5.1, 3.8, 7.6, 3.0, 4.5, 6.5, 3.6, 3.5, 4.7, 3.5, 4.7, 5.0, 4.7, 4.5, 4.8, 4.6, 4.0, 3.9, 4.6, 2.2, 3.7, 3.3, 3.8, 3.9, 4.1;

$$\gamma = 0.98, \quad \sigma = 1.$$

6.10. 2.5, 4.8, 8.5, 5.6, 5.1, 5.7, 3.9, 2.0, 4.8, 3.4, 5.8, 3.0, 3.1, 3.9, 6.9, 1.6, 7.6, 5.3, 5.7, 2.7, 1.7, 1.5, 6.6, 3.5, 7.0, 4.5, 6.1, 4.8, 7.0, 2.5, 0.9, 3.8, 3.2, 1.3, 3.3, 1.5;

$$\gamma = 0.99, \quad \sigma = 2.$$

6.11. 5.8, 2.1, 2.4, 5.9, 5.9, 3.8, 5.7, 10.2, 4.4, 2.6, 5.8, 5.9, 4.4, 3.8, 4.1, 2.9, 3.6, 3.3, 2.9, −0.3, 5.0, 2.3, 7.7, 2.0, 6.4;

$$\gamma = 0.9, \quad \sigma = 2.$$

6.12. 3.5, 4.5, 3.2, 6.3, 6.2, 3.9, 5.2, 3.9, 3.4, 4.4, 5.5, 5.3, 5.6, 4.7, 5.7, 4.4, 7.0, 5.9, 4.3, 4.8, 5.0, 3.7, 5.9, 4.4, 3.7, 3.3, 4.1, 4.6, 3.7, 6.5, 6.5, 4.3, 4.0, 4.4, 5.4, 5.0;

$$\gamma = 0.99, \quad \sigma = 1.$$

6.13. 0.9, −1.1, −0.6, −4.3, 4.8, −1.6, −6.3, −7.3, 1.3, −7.2, 1.5, 2.6, −3.3, −5.4, −0.1, −0.2, −1.3, −0.1, 0.3, −0.9, −1.6, −2.8, 0.6, −4.2, −2.3, −5.3, −2.7, −7.3, −3.5, 1.9, −2.7, −5.9, −3.2, −3.2, 0.1, −6.0, −7.3, −1.8, 3.6, −3.5, −2.2, −7.1, 1.4, −1.4, −2.6, −0.3, −2.8, −4.4, −3.9;

$$\gamma = 0.98, \quad \sigma = 3.$$

6.14. 0.2, −1.7, −2.0, 2.7, −0.2, 0.9, 1.7, 2.1, 0.6, 2.2, 0.7, −1.6, 1.0, −1.2, 1.7, −1.3, 0.2, 0.3, 0.8, 1.1, 0.8, 1.4, 2.7, 0.7, 0.0;

$$\gamma = 0.97, \quad \sigma = 1.5.$$

6.15. −2.2, −6.8, 2.0, −0.9, 1.9, 1.8, 1.0, 0.7, −7.1, −2.6, −2.7, 7.8, −3.9, −6.2, 1.2, −0.6, −1.3, −1.2, 0.9, 8.2, 2.0, −1.9, 2.7, −3.0, 1.3, 3.5, −5.2, −5.6, 1.8, 0.7, −0.5, 3.4, −1.2, 5.6, 1.1, 0.6;

$$\gamma = 0.96, \quad \sigma = 3.5.$$

6.16. −5.4, −3.7, −8.2, 0.0, −5.6, −1.2, −8.1, −3.0, −4.0, −5.4, −6.8, −7.0, 1.7, −7.6, −0.9, −8.6, −8.4, −3.5, −1.0, −2.6, −8.0, 0.7, −0.6, −3.5, −2.1, −5.5, −4.2, −0.1, −6.2, −4.5, −2.6, −7.0, 1.6, −6.7, −9.0, −4.0, −3.2, −3.6, −5.3, −8.6, 1.2, −5.6, −4.7, −0.7, −3.5, −4.1, −1.1, −3.7, −4.6;

$$\gamma = 0.95, \quad \sigma = 3.$$

6.17. 3.2, 4.2, 4.7, 0.8, 4.3, 3.3, 3.7, 3.9, 2.5, 4.3, 2.5, 2.8, 3.6, 4.2, 1.6, 0.9, 0.8, 0.9, 6.4, 1.0, 3.1, 5.0, −0.9, 3.6, 3.5;

$$\gamma = 0.94, \quad \sigma = 1.5.$$

6.18. −2.8, −0.7, 2.4, −3.1, −3.5, −1.3, −0.2, −5.1, −1.3, −0.4, −6.4, 0.7, 1.2, −0.0, 2.1, 0.4, −1.8, −3.5, 5.0, −3.6, 2.1, −5.3, 0.4, −2.8, −3.0, −1.3, −2.0, 0.2, −1.9, −0.9, −1.6, −1.0, −0.9, −2.5, −3.6, −1.5;

$$\gamma = 0.93, \quad \sigma = 2.5.$$

6.19. 3.5, 4.8, 9.2, 9.0, 7.8, 6.7, 8.4, 5.3, 3.5, 5.2, 6.4, 5.8, 5.8, 5.6, 3.0, 4.3, 6.7, 4.4, 8.7, 9.8, 5.5, 5.0, 5.1, 6.1, 6.2, 9.8, 2.9, 6.1, 8.1, 6.0, 9.8, 5.7, 7.1, 6.2, 6.3, 3.8, 6.5, 5.7, 6.1, 8.2, 6.4, 6.8, 5.8, 3.9, 7.9, 5.0, 7.1, 2.7, 5.1;

$$\gamma = 0.92, \quad \sigma = 2.$$

6.20. −4.4, −1.0, 0.6, −3.3, −3.6, −5.7, −1.6, −1.3, 2.8, −2.6, 1.0, 1.0, −0.2, 0.7, 1.2, −6.8, −1.6, −5.3, −2.9, −1.5, −2.3, −3.6, −1.0, −4.1, −8.7, −0.3, −5.5, −1.9, −4.5, 0.7, −2.8, −5.4, −6.3, −3.1, 1.9, −1.9, −8.4, −1.9, −9.3, −5.3, −3.0, −5.0, −6.8, −3.0, 1.8, −2.7, −1.3, −5.5, −0.3;

$$\gamma = 0.91, \quad \sigma = 3.$$

6.21. −0.1, 1.6, −1.3, −0.6, −3.8, −3.0, −1.4, −2.5, −2.3, −0.5, −5.0, −4.6, 1.8, −1.0, 0.6, −0.0, −2.1, −4.5, 1.7, −3.7, −4.5, −3.1, −1.3, −4.7, −3.8;

$$\gamma = 0.99, \quad \sigma = 2.$$

6.22. −0.8, −1.7, 1.9, 1.2, 2.4, 0.7, 1.1, 2.1, −3.7, 2.4, 1.8, −1.7, 1.1, −0.0, 3.0, −0.7, 4.5, 1.8, −0.3, 0.6, 2.5, 4.3, 0.7, 1.5, 1.2, 2.0, 1.0, −0.5, 0.4, 5.3, 3.6, 4.2, −1.8, 2.6, −0.5, 4.9;

$$\gamma = 0.98, \quad \sigma = 2.$$

6.23. 5.4, 1.5, 0.5, 2.0, 2.0, 2.4, 3.7, 1.2, 1.1, 2.6, 3.1, 2.7, 0.4, 0.8, 1.4, 6.1, 4.0, 1.3, 1.8, 2.8, 1.9, 6.5, 1.1, −1.8, −2.1, 1.1, 4.4, 1.9, 4.1, −0.7, 0.5, −0.8, −1.6, 1.6, 2.4, 3.7, −1.3, 6.5, 3.1, 0.7, −0.9, 0.5, 1.6, 3.8, 1.3, 2.0, 2.7, 0.3, −0.5;

$$\gamma = 0.97, \quad \sigma = 2.$$

6.24. 2.7, 3.7, 2.9, 3.8, 1.7, 2.4, 2.8, 2.7, 4.0, 3.8, 2.7, 2.5, 2.0, 3.5, 4.2, 1.2, 2.9, 1.9, 4.0, 3.7, 5.0, 3.5, 2.0, 4.0, 3.3, 3.8, 3.8, 5.1, 4.2, 4.2, 3.2, 4.0, 1.9, 3.3, 3.8, 3.6;

$$\gamma = 0.96, \quad \sigma = 1.$$

6.25. 3.2, 2.7, 7.2, 1.6, 7.7, 4.4, 1.2, 1.7, 4.2, 1.7, 0.8, 5.5, 4.5, 2.4, 0.9, 1.8, 2.4, 1.0, 2.9, 3.9, 5.1, 5.1, 1.9, 7.5, 4.2;

$$\gamma = 0.95, \quad \sigma = 2.$$

6.26. 5.4, 1.5, −2.4, 2.3, 0.1, −1.4, 8.7, 2.3, 0.6, 1.1, 3.4, −3.4, −3.7, −0.8, 5.7, −2.3, 0.6, 1.1, 0.4, 0.3, −0.1, 0.1, −0.6, 5.1, 1.7, 4.2, 5.8, 3.8, −1.6, 6.7, 1.4, −2.9, 3.4, 0.7, 1.2, 3.6, −2.8, −2.6, 5.1, 3.0, −0.8, −4.0, −2.0, 2.1, 1.8, 4.7, 0.9, 1.4, 0.4;

$$\gamma = 0.94, \quad \sigma = 3.$$

6.27. 5.1, 2.2, 5.2, 0.1, 4.4, 0.8, 7.2, −1.9, 5.4, −2.9, 2.5, 5.5, 1.2, 9.2, 3.8, 2.6, −0.1, 3.8, −0.3, 6.0, 6.8, −1.0, −2.9, 2.0, 3.0, −5.4, 2.4, 1.0, 8.7, 2.7, 1.5, 1.5, 2.1, 5.0, 4.0, 2.0;

$$\gamma = 0.93, \quad \sigma = 3.$$

6.28. 0.4, 6.0, 6.0, 4.8, 3.5, −2.2, 5.2, 2.9, 2.9, 9.7, 3.5, 2.6, 5.5, 9.6, 2.1, 1.8, 2.2, 9.6, 5.7, 2.5, 3.9, 1.4, 3.3, 2.4, 5.6;

$$\gamma = 0.92, \quad \sigma = 3.$$

6.29. −3.7, −1.5, −1.7, −8.8, 1.8, −4.3, −4.4, −1.1, −5.1, −6.6, −0.4, −7.9, −3.3, −10.7, −0.1, −3.0, −5.0, −6.8, 0.8, 3.6, −4.1, −12.5, −5.3, −6.6, −3.9, −2.9, −1.8, 4.3, −1.3, −7.3, −2.4, −0.4, −5.5, −4.2, 0.3, −3.6;

$$\gamma = 0.91, \quad \sigma = 4.$$

6.30. −3.1, 4.1, −0.3, −1.9, −3.0, −4.0, 1.2, 1.1, −1.1, −1.5, −1.0, −1.7, 2.4, −0.4, −3.1, −3.5, −5.0, −2.6, −3.9, −4.8, −0.8, −2.6, 0.3, −4.0, −5.1, 0.2, −2.0, 0.9, −3.1, −1.2, −1.8, −3.4, −4.6, −3.6, −3.2, −5.0, 0.1, 3.5, 0.1, −2.2, 3.6, −1.8, −0.6, −0.6, 0.8, −4.1, 0.8, −0.9, −0.9;

$$\gamma = 0.9, \quad \sigma = 2.$$

Задача №7.

Дано межі інтервалів, емпіричні частоти попадання вибіркових значень та деякі теоретичні частоти попадання в ці інтервали. Необхідно довизначити невідомі теоретичні частоти та, використовуючи критерій Пірсона (χ^2) при рівні значущості α, перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності випадкової величини з емпіричним розподілом вибірки.

7.1.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-5.05; -4.03)$	1	1.64
$[-4.03; -3.01)$	7	5.86
$[-3.01; -1.99)$	15	15.36
$[-1.99; -0.97)$	34	29.55
$[-0.97; 0.04)$	43	
$[0.04; 1.06)$	36	43.35
$[1.06; 2.08)$	32	33.05
$[2.08; 3.10)$	20	
$[3.10; 4.12]$	12	7.62

$\alpha = 0.1.$

7.2.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-4.59; -3.45)$	1	2.26
$[-3.45; -2.32)$	12	
$[-2.32; -1.18)$	20	19.63
$[-1.18; -0.05)$	31	35.21
$[-0.05; 1.09)$	48	
$[1.09; 2.22)$	39	41.98
$[2.22; 3.36)$	28	27.91
$[3.36; 4.49)$	15	13.33
$[4.49; 5.63]$	6	4.57

$\alpha = 0.025.$

7.3.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-0.49; 0.05)$	4	3.17
$[0.05; 0.60)$	10	10.04
$[0.60; 1.14)$	28	22.97
$[1.14; 1.68)$	34	38.00
$[1.68; 2.23)$	40	
$[2.23; 2.77)$	43	39.27
$[2.77; 3.31)$	25	
$[3.31; 3.86)$	11	11.08
$[3.86; 4.40]$	5	3.62

$\alpha = 0.05.$

7.4.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-1.16; -0.59)$	10	4.40
$[-0.59; -0.03)$	7	9.80
$[-0.03; 0.54)$	15	16.46
$[0.54; 1.10)$	23	
$[1.10; 1.67)$	21	19.91
$[1.67; 2.23)$	9	
$[2.23; 2.80)$	10	7.80
$[2.80; 3.36]$	5	3.20

$\alpha = 0.025.$

7.5.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-0.75; -0.17)$	4	1.63
$[-0.17; 0.41)$	6	5.26
$[0.41; 0.98)$	7	
$[0.98; 1.56)$	17	19.90
$[1.56; 2.14)$	27	
$[2.14; 2.72)$	21	19.33
$[2.72; 3.29)$	13	11.45
$[3.29; 3.87]$	5	4.83

$\alpha = 0.1.$

7.6.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-4.14; -2.60)$	9	6.23
$[-2.60; -1.06)$	17	19.16
$[-1.06; 0.48)$	31	36.03
$[0.48; 2.03)$	47	
$[2.03; 3.57)$	30	29.21
$[3.57; 5.11)$	12	
$[5.11; 6.65)$	3	3.32
$[6.65; 8.19]$	1	0.54

$\alpha = 0.075.$

7.7. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-5.16; -3.95)$	4	1.85
$[-3.95; -2.75)$	8	7.57
$[-2.75; -1.54)$	18	
$[-1.54; -0.33)$	31	34.74
$[-0.33; 0.87)$	44	
$[0.87; 2.08)$	26	28.22
$[2.08; 3.28)$	15	13.30
$[3.28; 4.49]$	4	4.06

7.8. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-3.04; -2.44)$	9	5.85
$[-2.44; -1.84)$	10	13.02
$[-1.84; -1.23)$	26	20.62
$[-1.23; -0.63)$	24	
$[-0.63; -0.03)$	11	18.57
$[-0.03; 0.57)$	12	
$[0.57; 1.18)$	6	4.28
$[1.18; 1.78]$	2	1.23

7.9. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-4.15; -3.30)$	2	1.43
$[-3.30; -2.45)$	6	7.20
$[-2.45; -1.61)$	18	19.98
$[-1.61; -0.76)$	34	
$[-0.76; 0.09)$	25	25.55
$[0.09; 0.94)$	11	
$[0.94; 1.78)$	3	2.98
$[1.78; 2.63]$	1	0.42

7.10. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
$[-3.26; -1.98)$	3	2.43
$[-1.98; -0.71)$	6	7.05
$[-0.71; 0.57)$	16	
$[0.57; 1.84)$	23	21.56
$[1.84; 3.11)$	25	
$[3.11; 4.39)$	10	17.08
$[4.39; 5.66)$	11	9.16
$[5.66; 6.94]$	6	3.51

7.11. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-2.01; -1.50)	13	8.18
[-1.50; -1.00)	16	18.18
[-1.00; -0.49)	36	30.90
[-0.49; 0.01)	41	
[0.01; 0.52)	36	39.85
[0.52; 1.02)	27	
[1.02; 1.53)	19	17.54
[1.53; 2.03)	8	7.77
[2.03; 2.54]	4	2.63

7.12. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-3.67; -3.05)	3	2.30
[-3.05; -2.43)	9	9.28
[-2.43; -1.80)	23	
[-1.80; -1.18)	44	43.70
[-1.18; -0.56)	54	
[-0.56; 0.06)	40	39.54
[0.06; 0.69)	18	20.26
[0.69; 1.31)	7	6.87
[1.31; 1.93]	2	1.54

7.13. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-4.01; -2.73)	5	5.55
[-2.73; -1.45)	24	16.81
[-1.45; -0.16)	32	34.58
[-0.16; 1.12)	44	48.33
[1.12; 2.40)	51	
[2.40; 3.68)	25	29.62
[3.68; 4.97)	14	
[4.97; 6.25)	3	3.87
[6.25; 7.53]	2	0.78

7.14. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-6.63; -4.85)	6	3.76
[-4.85; -3.06)	13	11.71
[-3.06; -1.28)	24	
[-1.28; 0.50)	37	41.07
[0.50; 2.29)	50	
[2.29; 4.07)	35	37.14
[4.07; 5.85)	25	21.25
[5.85; 7.64)	5	8.67
[7.64; 9.42]	5	2.52

7.15.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-8.22; -5.98)	5	5.38
[-5.98; -3.73)	19	14.77
[-3.73; -1.49)	27	29.39
[-1.49; 0.76)	44	
[0.76; 3.00)	38	44.31
[3.00; 5.25)	38	33.58
[5.25; 7.49)	21	
[7.49; 9.74)	5	7.35
[9.74; 11.98]	3	2.12

$\alpha = 0.05.$

7.16.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-1.47; -0.80)	1	0.47
[-0.80; -0.12)	1	2.78
[-0.12; 0.55)	13	10.88
[0.55; 1.22)	30	
[1.22; 1.90)	40	46.60
[1.90; 2.57)	53	51.06
[2.57; 3.24)	37	
[3.24; 3.92)	18	17.20
[3.92; 4.59]	7	5.28

$\alpha = 0.025.$

7.17.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-8.09; -6.88)	3	1.47
[-6.88; -5.68)	4	5.92
[-5.68; -4.47)	17	16.72
[-4.47; -3.26)	37	33.13
[-3.26; -2.06)	42	
[-2.06; -0.85)	41	44.83
[-0.85; 0.36)	35	
[0.36; 1.56)	16	14.67
[1.56; 2.77]	5	4.93

$\alpha = 0.05.$

7.18.

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-11.28; -8.23)	5	3.65
[-8.23; -5.19)	13	11.06
[-5.19; -2.14)	22	
[-2.14; 0.91)	40	38.93
[0.91; 3.95)	41	45.16
[3.95; 7.00)	46	
[7.00; 10.05)	17	23.23
[10.05; 13.09)	9	10.30
[13.09; 16.14]	7	3.32

$\alpha = 0.075.$

7.19. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-15.26;-11.93)	3	0.73
[-11.93; -8.59)	3	3.77
[-8.59; -5.26)	10	12.99
[-5.26; -1.93)	30	
[-1.93; 1.41)	52	46.75
[1.41; 4.74)	45	
[4.74; 8.07)	33	34.25
[8.07; 11.41)	20	16.14
[11.41; 14.74]	4	5.11

7.20. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-12.03; -9.96)	1	0.25
[-9.96; -7.88)	3	1.88
[-7.88; -5.81)	10	8.93
[-5.81; -3.73)	25	
[-3.73; -1.66)	37	48.05
[-1.66; 0.42)	65	54.41
[0.42; 2.49)	35	
[2.49; 4.57)	20	16.63
[4.57; 6.64]	4	4.49

7.21. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-25.69;-20.76)	4	1.65
[-20.76;-15.82)	6	6.94
[-15.82;-10.89)	22	19.77
[-10.89; -5.95)	30	38.06
[-5.95; -1.02)	56	
[-1.02; 3.92)	42	43.69
[3.92; 8.85)	26	
[8.85; 13.79)	11	10.50
[13.79; 18.72]	3	2.87

7.22. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-10.21; -7.75)	2	0.82
[-7.75; -5.30)	7	4.17
[-5.30; -2.84)	6	
[-2.84; -0.39)	29	31.76
[-0.39; 2.07)	58	47.93
[2.07; 4.52)	49	48.35
[4.52; 6.98)	30	
[6.98; 9.43)	15	14.70
[9.43; 11.89]	4	4.43

7.23. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-8.38; -5.80)	8	5.04
[-5.80; -3.22)	16	12.64
[-3.22; -0.63)	25	24.35
[-0.63; 1.95)	30	
[1.95; 4.53)	40	
[4.53; 7.11)	38	35.78
[7.11; 9.70)	22	24.01
[9.70; 12.28)	15	12.38
[12.28; 14.86]	6	4.90

7.24. $\alpha = 0.025$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-9.56; -6.47)	11	6.78
[-6.47; -3.39)	16	15.93
[-3.39; -0.30)	33	28.56
[-0.30; 2.79)	36	
[2.79; 5.87)	33	40.83
[5.87; 8.96)	34	32.55
[8.96; 12.05)	24	
[12.05; 15.13)	10	9.20
[15.13; 18.22]	3	3.26

7.25. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-14.25;-11.62)	4	2.92
[-11.62; -8.98)	8	9.10
[-8.98; -6.35)	24	20.86
[-6.35; -3.71)	35	35.22
[-3.71; -1.08)	41	
[-1.08; 1.56)	42	40.14
[1.56; 4.19)	27	
[4.19; 6.83)	10	13.47
[6.83; 9.46]	9	4.93

7.26. $\alpha = 0.075.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-24.60;-19.39)	3	2.75
[-19.39;-14.18)	8	9.90
[-14.18; -8.97)	26	24.50
[-8.97; -3.76)	48	41.67
[-3.76; 1.45)	47	
[1.45; 6.66)	38	
[6.66; 11.87)	18	21.71
[11.87; 17.08)	7	8.26
[17.08; 22.29]	5	2.16

7.27. $\alpha = 0.05.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-27.23;-21.66)	4	2.84
[-21.66;-16.09)	9	9.94
[-16.09;-10.52)	24	
[-10.52; -4.95)	43	40.95
[-4.95; 0.61)	51	48.12
[0.61; 6.18)	32	
[6.18; 11.75)	23	22.29
[11.75; 17.32)	9	8.78
[17.32; 22.89]	5	2.40

7.28. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-13.96;-11.27)	10	6.82
[-11.27; -8.58)	22	19.11
[-8.58; -5.89)	37	36.74
[-5.89; -3.20)	46	48.47
[-3.20; -0.50)	39	
[-0.50; 2.19)	29	27.24
[2.19; 4.88)	14	
[4.88; 7.57)	2	3.39
[7.57; 10.26]	1	0.68

7.29. $\alpha = 0.1.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-16.49;-12.29)	5	3.28
[-12.29; -8.10)	12	10.34
[-8.10; -3.90)	22	
[-3.90; 0.29)	39	38.59
[0.29; 4.49)	38	
[4.49; 8.68)	44	38.91
[8.68; 12.88)	19	23.92
[12.88; 17.07)	19	10.60
[17.07; 21.27]	2	3.39

7.30. $\alpha = 0.025.$

Інтервал	Частота	Теоретична частота
[-4.90; -4.32)	4	2.24
[-4.32; -3.74)	5	7.58
[-3.74; -3.15)	21	18.68
[-3.15; -2.57)	34	
[-2.57; -1.99)	48	43.97
[-1.99; -1.41)	34	41.99
[-1.41; -0.82)	29	
[-0.82; -0.24)	19	14.84
[-0.24; 0.34]	6	5.49

Задача №8.

В задачах 1 — 30 знайти точкові оцінки параметрів лінійної регресії $y = ax + b$ за вибірковими даними.

8.1.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0.3	0.8	-1.2	-0.4	-1.8	-2.9	-4.5	-4.9	-7.1	-6.4

8.2.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4.7	6.2	5.9	8.1	10.7	13.0	12.9	15.7	18.8	21.0

8.3.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.4	2.1	4.4	5.4	7.4	6.5	9.5	11.1	12.7	12.2

8.4.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4.4	7.2	8.3	11.4	14.1	14.6	17.9	19.6	20.9	22.6

8.5.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	5.7	6.8	7.8	6.9	9.2	10.5	10.1	9.8	9.8	14.8

8.6.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2.4	2.5	1.2	1.4	-0.4	-0.2	-2.1	-3.1	-5.3	-5.8

8.7.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3.0	6.7	3.3	3.1	0.8	-0.6	-1.9	-2.7	-2.8	-5.6

8.8.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2.7	2.5	4.6	4.8	8.2	7.4	6.3	7.9	11.3	10.4

8.9.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.9	-0.9	-4.8	-5.1	-6.4	-9.1	-10.8	-13.0	-16.7	-15.7

8.10.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0.8	2.5	4.7	3.6	5.6	5.1	7.4	9.0	9.3	9.7

8.11.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2.7	2.8	5.4	7.0	10.2	12.5	14.4	14.5	17.4	19.6

8.12.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-1.6	2.2	4.3	2.2	2.8	4.6	7.4	7.9	10.8	6.8

8.13.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-0.1	3.6	5.8	8.4	7.1	11.8	13.4	15.7	16.7	18.2

8.14.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4.2	6.5	8.2	9.2	10.5	13.1	16.1	17.3	20.1	20.2

8.15.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2.9	4.2	6.3	4.2	5.2	5.3	8.8	9.8	8.5	11.2

8.16.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0.1	0.3	-1.6	-2.7	-4.4	-3.5	-6.7	-6.7	-9.0	-11.3

8.17.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-0.2	0.6	-2.2	-2.5	-2.6	-5.2	-4.6	-6.5	-5.3	-7.5

8.18.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0.5	-0.8	-4.8	-4.9	-7.5	-11.0	-10.6	-12.9	-16.0	-19.3

8.19.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-1.1	-2.8	-4.4	-6.4	-9.9	-11.2	-12.3	-15.7	-15.3	-19.5

8.20.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.9	-0.6	-3.9	-4.2	-6.4	-7.7	-11.1	-12.7	-15.4	-16.4

8.21.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	1.6	-1.6	-1.8	-4.1	-5.3	-7.3	-9.0	-13.4	-15.1	-16.3

8.22.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3.6	1.4	-0.5	0.0	-0.6	-1.4	-2.8	-4.9	-5.0	-8.1

8.23.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2.4	3.6	1.0	0.8	-0.3	0.8	-1.2	-2.1	-3.3	-6.5

8.24.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-4.0	-4.5	-2.2	0.1	1.1	1.4	1.6	2.1	3.7	5.0

8.25.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-3.4	1.1	0.3	3.8	3.4	7.6	9.4	13.4	14.4	14.2

8.26.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-7.4	-3.7	-1.7	-0.7	3.3	4.1	6.6	7.6	9.2	11.2

8.27.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-6.3	-6.5	-5.3	-2.8	-0.8	-1.5	-0.6	-0.3	-0.3	2.3

8.28.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-9.3	-6.9	-2.4	0.2	3.4	7.0	8.5	11.0	14.8	18.0

8.29.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	-7.0	-1.0	1.4	5.5	10.5	10.9	16.0	21.1	25.7	29.1

8.30.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	4.1	2.7	0.1	-1.6	-4.1	-4.1	-9.0	-9.3	-9.4	-14.2

Література

[1] Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. – К.: КНЕУ, 2000 – 2001.
Ч. 1. Теорія ймовірностей. – 2000. – 304 с.
Ч. 2. Математична статистика – 2001. – 336 с.

[2] Турчин В.М. Математична статистика: Навч. посібник. – К.: Видавничий центр "Академія 1999. – 240 с.

[3] Шефтель З.Г. Теорія ймовірностей. – К.: Вища шк., 1994. – 192 с.

[4] Булига К.Б., Барановська Л.В. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посібник. – К.: Європ. ун-т (фінанси, інформ. системи, менеджмент і бізнес), 2000. – 173 с.

[5] Осипчук М.М. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Конспект лекцій в двох частинах. – Івано-Франківськ: ІФДТУНГ, 1999 – 2002.
Ч. 1. Теорія ймовірностей. – 1999. – 109 с.
Ч. 2. Математична статистика. – 2003. – 86 с.

Зміст