

**Федак І.В.**  
**III етап Всеукраїнської олімпіади з математики**  
**в Івано-Франківській області 2015 – 2016 н. р.**

17 січня на базі ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» проходив III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2015-2016 н. р. в Івано-Франківській області.

В олімпіаді взяли участь 150 учнів 7 – 11 класів, які розв'язували завдання достатнього рівня I туру олімпіади, запропоновані Міністерством освіти і науки України.

Перевіривши роботи учасників, журі рекомендувало відзначити дипломами переможців 69 учнів. Серед них дипломи I ступеня отримали:

Чудик Михайло, Долинська гімназія №1, 7 клас,  
Тринога Мирослав, Івано-Франківський ПМЛ, 8 клас,  
Скрипник Юрій, Городенківська гімназія, 8 клас,  
Мироненко Станіслав, Калуська гімназія, 9 клас,  
Дирів Андрій, Долинський ПМЛ, 10 клас,  
Лабенський Данило, Українська гімназія №1, 11 клас,  
Сабра Андріан, Фізико-технічний ліцей, 11 клас.

За матеріалами сайту <http://www.matholymp.com.ua> наводимо умови та розв'язання задач достатнього рівня I туру III етапу Всеукраїнської олімпіади з математики. Для частини з них автором статті запропоновані альтернативні чи частково відкориговані розв'язання.

Оскільки II тур в області не проводився, то наводимо тут умови та розв'язання задач тренувальної олімпіади для учасників тренувально-відбіркових зборів – кандидатів у збірну команду області на IV етап Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

7 клас

**1.** Дідусь, тато та онук пробігли дистанцію від дому до крамниці та назад. При цьому онук туди і назад біг з однаковою швидкістю. Дідусь туди біг удвічі швидше, а назад у 3 рази повільніше за онука. Тато біг туди удвічі повільніше, а назад у 3 рази швидше за онука. В якому порядку вони повернуться додому?

*Розв'язання.* Позначимо через  $t$  час, затрачений онуком на дорогу від дому до крамниці.

Тоді шлях в обидва боки онук подолає за час  $2t$ , тато – за час  $2t + \frac{t}{3}$ , а дідусь – за час  $\frac{t}{2} + 3t$ .

Оскільки  $2t < 2t + \frac{t}{3} < \frac{t}{2} + 3t$ , то додому вони повернуться у такому порядку: онук, тато, дідусь.

**2.** З 22-х карток, на яких записані числа 1, 2, ..., 22, склали 11 дробів (перегортати картки не можна). Яка найбільша кількість цілих чисел може виявитись серед отриманих дробів?

*Розв'язання.* Прості числа 13, 17, 19 можуть дати ціле число лише за умови, що вони стоять у чисельнику, а у них в знаменнику стоятиме 1. Тому принаймні один дріб не буде цілим числом, наприклад  $\frac{17}{19}$ . Інші 10 дробів, які є цілими числами, можна отримати, наприклад, так:

$$\frac{13}{1}, \frac{10}{2}, \frac{21}{3}, \frac{20}{4}, \frac{15}{5}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{22}{11}.$$

**3.** У таблиці  $4 \times 4$ , що показана на рисунку справа, треба у 4 комірки поставити по одній зірочці таким чином, щоб ця розстановка задовольняла такі умови: у кожному стовпчику та кожному рядку не повинно бути більше однієї зірочки, жодні дві зірочки не мають стояти у сусідніх по діагоналі комірках. У яких полях можуть стояти зірочки? Вкажіть усі можливі відповіді.

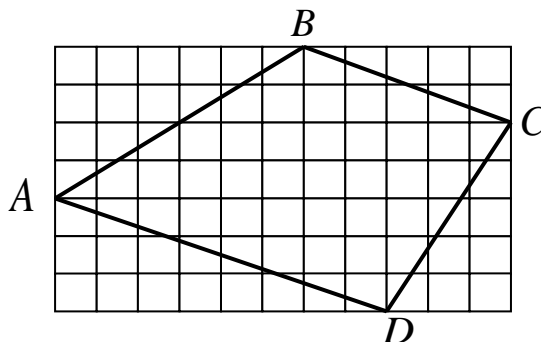
1				
2				
3				
4				
	а	б	в	г

*Розв'язання.* Якщо зірочка розташована в клітині «б2», то у сусідніх з нею восьми клітинках інших зірочок бути не може. Тому для решти трьох зірочок залишаються лише стовпчик «г» та рядок «4». Але тоді принаймні дві зірочки опиняться в одному рядку чи в одному стовпчику, що суперечить умові задачі. Тому в клітині «б2» зірочки немає. Аналогічно

доводимо, що зірочок немає в клітинках «б3», «в2», «в3». Нехай тепер зірочка знаходиться в клітині «а1». З умови задачі та доведеного вище випливає, що у квадраті з діагоналлю «а1» - «в3» інших зірочок немає. А розміщення їх трьох у стовпчику «г» та рядку «4» знову приводить до суперечності. Тому в клітині «а1» зірочки немає. Аналогічно доводимо відсутність зірочок в інших кутових клітинках: «а4», «г1», «г4». Таким чином, для розміщення зірочок залишаються решта 8 клітинок таблиці. Нескладно переконатися, що при цьому умову задачі задовольняють лише такі два варіанти їх розміщення: («а2», «б4», «в1», «г3») або («а3», «б1», «в4», «г2»).

4. Чому дорівнює площа чотирикутника  $ABCD$ , що зображений на рисунку справа, якщо сторона малого квадрата дорівнює 1 см?

*Розв'язання.* Оскільки діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі, то площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів. Поза чотирикутником  $ABCD$  у намальованому прямокутнику знаходяться 4 прямокутні трикутники з гіпотенузами  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  та  $DA$  відповідно, сума площ яких дорівнює  $0,5 \cdot 4 \cdot 6 + 0,5 \cdot 5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 8 \cdot 3 = 36,5$ . Віднімаючи цю суму від площі  $S = 11 \cdot 7 = 77$  всього прямокутника, отримаємо  $S_{ABCD} = 77 - 36,5 = 40,5$ .



#### 8 клас

1. Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4?

*Розв'язання.* Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням 12, 32, ..., 92 та 16, 36, ..., 96. Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8. Всі вісім таких чисел: 444, 448, 484, 488, 844, 848, 884, 888 – умову задачі задовольняють.

2. Знайдіть принаймні одну пару натуральних чисел  $(x, y)$ , що задовольняє рівність:

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^3) = 2016.$$

*Розв'язання.* Запишемо умову задачі у вигляді:

$$x^2 - y^3 = 2 \cdot 2016 = 64 \cdot 63 = 64 \cdot (64 - 1) = 64^2 - 4^3.$$

Звідси випливає, що рівність задовольняють числа  $x = 64$  та  $y = 4$ . Ця пара не єдина. Підходить, наприклад, ще й пара чисел  $x = 69$  та  $y = 9$ .

3. Андрій, Богдан та Олеся йшли однією дорогою від будинку до школи. Андрій йшов зі швидкістю  $a$  км/год протягом  $(2 - b)$  годин, Богдан йшов зі швидкістю  $b$  км/год протягом  $(2 - c)$  годин, Олеся йшла зі швидкістю  $c$  км/год протягом  $(2 - a)$  годин, де  $a, b, c$  – деякі, не обов'язково цілі, числа. Яка відстань між будинком та школою, якщо відомо, що вона вимірюється цілою кількістю кілометрів?

*Розв'язання.* Нехай шукана відстань дорівнює  $S$  км. Тоді  $S = a(2 - b)$ ,  $S = b(2 - c)$ ,  $S = c(2 - a)$ . Отже,  $S^3 = abc(2 - a)(2 - b)(2 - c) = a(2 - a) \cdot b(2 - b) \cdot c(2 - c)$ . З нерівності  $x(2 - x) \leq 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$  для  $a, b, c \in (0; 2)$  отримуємо, що  $S^3 \leq 1$ . А оскільки число  $S$  є натуральним, то  $S = 1$ , і відстань до школи становить 1 км.

4. Чи можна рівносторонній трикутник розрізати на:

- три однакових чотирикутники;
- три однакових п'ятикутники?

Чотирикутники та п'ятикутники не обов'язково опуклі.

*Розв'язання.* Доведемо, що в обох випадках відповідь «так». Нехай  $ABC$  – рівносторонній трикутник,  $M, N, K$  – середини його сторін (див. рисунок справа). Відрізки  $AN, BK$  та  $CM$  перетинаються в точці  $O$ .

а). Для розбиття на однакові чотирикутники достатньо розглянути, наприклад, чотирикутники  $AMOK, BNOM$  та  $CKON$ .

б). Позначимо тепер середини відрізків  $OM, ON$  та  $OK$  через  $P, R$  та  $Q$  відповідно. Шуканими п'ятикутниками є  $ABROP, BCQOR$  та  $CAPOQ$ .

**5.** В опуклому чотирикутнику  $ABCD$  справджуються рівності:  $\angle ABC = \angle BCD$  та  $2AB = CD$ . На стороні  $BC$  вибрана така точка  $X$  така, що  $\angle BAX = \angle CDA$ . Доведіть, що  $AX = AD$ .

*Розв'язання.* Нехай  $K$  – середина сторони  $CD$  (див. рисунок справа). Тоді  $CK = DK = AB$ , та оскільки  $\angle ABC = \angle BCD$ , то  $ABCK$  – рівнобічна трапеція. Отже,  $AK \parallel BC$  та  $\angle AKD = \angle BCD$ .  $\triangle ABX = \triangle DKA$  (за стороною  $AB = DK$  та прилеглими до неї кутами), тому й  $AX = AD$ .

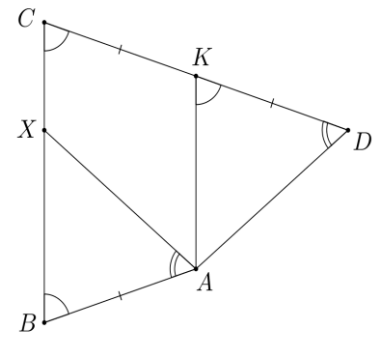
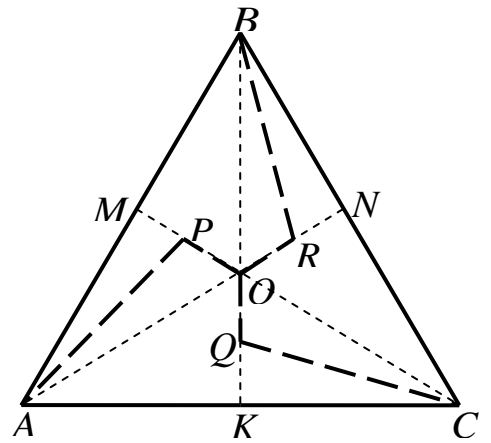


рис.9

9 клас

1. Див. задачу 8.1.
2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz = y, \\ y^2 + yz + yx = z, \\ z^2 + zx + zy = x. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x(x + y + z) = y, \\ y(x + y + z) = z, \\ z(x + y + z) = x. \end{cases}$$

Якщо  $x + y + z = 0$ , то звідси зразу отримуємо  $x = y = z = 0$ . Якщо ж  $x + y + z \neq 0$ , то, додавши ці рівняння, одержимо  $(x + y + z)^2 = x + y + z$ , звідки маємо  $x + y + z = 1$ . З врахуванням рівнянь системи отримуємо рівності  $x = y, y = z, z = x$ . Отже, знаходимо ще один розв'язок

$$x = y = z = \frac{1}{3}.$$

3. Знайдіть усі натуральні  $n$ , для яких число  $11^n - 1$  ділиться націло на  $10^n - 1$ .

*Розв'язання.* Доведемо, що таких натуральних  $n$  не існує. Справді, при кожному  $n$  натуральному  $10^n - 1$  ділиться на 3, тому й  $11^n - 1$  повинно ділитися на 3, що можливо лише для парних  $n$ . Але для таких  $n$  числа  $10^n - 1$  діляться на 11, а числа  $11^n - 1$  не діляться на 11 при жодному  $n$ .

**4.** Вершини куба деяким чином перенумеровані числами 1; 2; ...; 8. Петрику повідомили для трьох з шести граней куба номери вершин, що їм відповідають: {1; 4; 6; 8}, {1; 2; 6; 7}, {1; 2; 5; 8}. Чи зможе Петрик за цими даними сказати, який номер має вершина, що найбільш віддалена від вершини з номером 5?

*Розв'язання.* Зможе. Наявність одиниці у трьох названих множинах номерів вершин свідчить, що ці три грані сходяться в одній вершині з номером 1. Наявність пар однакових номерів у названих множинах свідчить про те, що з цієї вершини виходять ребра 1 – 2, 1 – 6 та 1 – 8, причому вершина з номером 6 є протилежною по великій діагоналі куба до четвертої

вершини грані, три з вершин якої мають номери 1, 2, 8, тобто до вершини з номером 5. Тому найбільш віддаленою від вершини з номером 5 є вершина з номером 6.

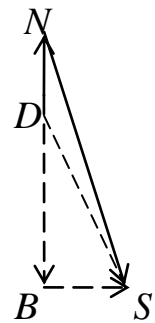
5. На сторонах  $AB$  та  $AD$  квадрата  $ABCD$  вибрані точки  $N$  та  $P$  відповідно таким чином, що  $PN = NC$ , точка  $Q$  – точка на відрізку  $AN$ , для якої  $\angle NCB = \angle QPN$ . Доведіть, що  $\angle BCQ = \frac{1}{2} \angle PQA$ .

*Розв'язання.* З умов задачі випливає, що  $\angle BCP = \angle CPQ$ . Проведемо перпендикуляри  $CK$  та  $PS$  до сторін  $PQ$  та  $CB$  відповідно.  $\triangle CPK = \triangle PCS$  (за спільною гіпотенузою та відповідними гострими кутами). Тому  $CK = PS = AB = BC$ , отже,  $\triangle QBC = \triangle QKC$  (за рівними катетами і спільною гіпотенузою). Звідси, враховуючи, що чотирикутник  $KCBQ$  – вписаний, отримуємо потрібну рівність  $\angle BCQ = \angle KCQ = \frac{1}{2} \angle BCK = \frac{1}{2} \angle PQA$ , що й завершує доведення.

### 10 клас

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

*Розв'язання.* Позначимо точки таким чином: дім –  $D$ , місце школи –  $S$ , точка де Петрик повертає на схід –  $B$ , точка, де повертає Остап, –  $N$  (див. рисунок справа). Тоді за умовою  $DB = 210$ ,  $BS = 70$ ,  $DN = x$ ,  $NS = y$ . За теоремою Піфагора  $BN^2 + BS^2 = NS^2$  або  $(210 + x)^2 + 70^2 = y^2$ . Оскільки, крім того, за умовою  $x + y = 280$ , то  $(210 + x)^2 + 70^2 = (280 - x)^2$ . Звідси знаходимо  $x = 30$ , тобто Остап йде на північ 30 метрів.



2. Є 12 стільців, розташованих в одну лінію та перенумеровані зліва направо числами 1; 2; ...; 12. Федір може стрибати по цих стільцях за такими правилами: зі стільця з номером  $k$  він може стрибнути на стілець з номером  $n$  тоді і тільки тоді, коли  $|k - n| = 5$  або  $|k - n| = 8$ . Відомо, що Федір, розпочавши з деякого стільця, зміг пострибати по них так, що побував на кожному стільці рівно один раз. Із стільця з яким номером Федір мав почати стрибати?

*Розв'язання.* Зауважимо, що існують лише два стільці (за номерами 5 та 8), стрибнути на які чи зістрибнути з яких можна єдиним способом. Тому стрибки Федора обов'язково повинні розпочинатися з одного з них та закінчуватися на іншому. При цьому однозначно отримуємо два варіанти стрибків, які задовольняють умови задачі. Це:

$$5 \rightarrow 10 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 12 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 11 \rightarrow 3 \rightarrow 8$$

та у зворотному напрямі.

3. Квадратний тричлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  з цілими коефіцієнтами для кожного цілого значення  $X$  ділиться націло на натуральне число  $N$ . Чи обов'язково на  $N$  ділиться кожний з коефіцієнтів цього тричлена, якщо: а)  $N = 2016$ ; б)  $N = 2017$ ?

*Розв'язання.* а). Не обов'язково. Наприклад, квадратний тричлен  $f(x) = 1008x^2 + 1008x + 2016 = 1008x(x+1) + 2016$  для кожного цілого значення  $x$  ділиться націло на 2016, бо для цілих  $x$  добуток  $x(x+1)$  завжди парний.

б). Обов'язково. Справді,

$$f(0) = c \div 2017; f(1) = a + b + c \div 2017 \Rightarrow a + b \div 2017; f(-1) = a - b + c \div 2017 \Rightarrow a - b \div 2017.$$

Але тоді на 2017 діляться також числа  $2a = (a + b) + (a - b)$  та  $2b = (a + b) - (a - b)$ . Оскільки ж число 2017 непарне, то всі коефіцієнти тричлена повинні ділитися на 2017.

4. Див. задачу 9.5.

5. Для додатних чисел  $a, b, c$ , що задовольняють умову  $a + b + c = 1$ , доведіть нерівність:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

*Розв'язання.* Розглянемо такі перетворення:

$$\frac{a}{a+b^2} = \frac{a}{a(a+b+c)+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2+ab+ac} \leq \frac{a}{2ab+ab+ac} = \frac{1}{3b+c}.$$

З нерівності  $\left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) (b+b+b+c) \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{b^3c}} \cdot 4\sqrt[4]{b^3c} = 16$  маємо:  $\frac{1}{3b+c} \leq \frac{1}{16} \left( \frac{3}{b} + \frac{1}{c} \right)$ .

Додавши три аналогічні нерівності, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} &\leq \frac{1}{3b+c} + \frac{1}{3c+a} + \frac{1}{3a+b} \leq \\ &\leq \frac{1}{16} \left( \frac{3}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{16} \left( \frac{3}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{16} \left( \frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

### 11 клас

**1.** Порівняйте числа:

$$A = 11, \quad B = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{2015} 2016 \quad \text{та} \quad C = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{2016} 2015.$$

*Розв'язання.* Кожен множник числа  $C$  додатний і менший за 1, тому  $C < 1$ . Кожен множник числа  $B$  більший за 1, тому  $B > 1$ . І, нарешті, скориставшись формулою  $\log_a b = \frac{\log_2 b}{\log_2 a}$ ,

отримуємо:  $B = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 2016}{\log_2 2015} = \log_2 2016 < \log_2 2048 = 11$ . Отже,  $C < B < A$ .

**2.** Див. задачу 10.3 б).

**3.** Знайдіть усі трійки додатних чисел  $a, b, c$ , що задовольняють умови:

$$ab \left( 1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right) = bc \left( 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) = ca \left( 1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} \right).$$

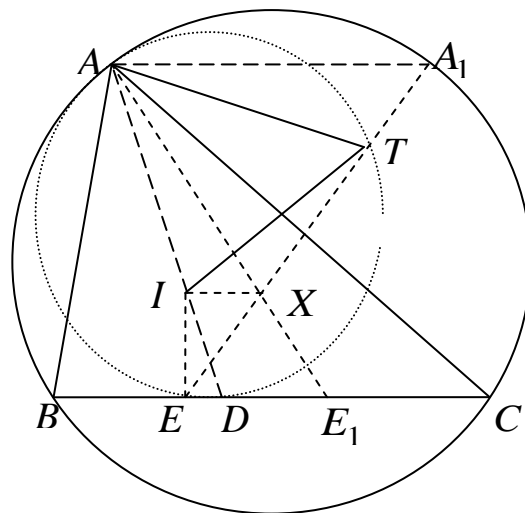
*Розв'язання.* Зауважимо, що у всіх трьох дужках вирази одного знака. Вони додатні, бо для додатних чисел  $a, b, c$  не можуть одночасно виконуватися нерівності:  $c \geq a+b$ ,  $a \geq b+c$ ,

$$b \geq c+a. \quad \text{Припустимо, що } a < b. \quad \text{Тоді } 0 < ca < bc, \quad \frac{a}{b+c} < \frac{b}{a+c}, \quad 0 < 1 - \frac{b^2}{(c+a)^2} < 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2},$$

отже, друга з рівностей умови задачі не справджується. Аналогічно доводимо хибність припущення  $a > b$ . Тому  $a = b$ . Так само встановлюємо рівності  $b = c$  та  $c = a$ . Остаточно отримуємо:  $a = b = c = t$ , де  $t$  – довільне додатне число.

**4.** У трикутнику  $ABC$  проведена бісектриса  $AD$ ,  $E$  – точка дотику вписаного кола до сторони  $BC$ ,  $I$  – центр вписаного кола трикутника  $ABC$ . Точка  $A_1$  на описаному колі трикутника  $ABC$  така, що  $AA_1 \parallel BC$ . Позначимо через  $T$  – другу точку перетину прямої  $EA_1$  та описаного кола трикутника  $AED$ . Доведіть, що  $IT = IA$ .

*Розв'язання.* Нехай для конкретності  $\angle B > \angle C$  як на рисунку справа. За властивістю вписаних кутів маємо  $\angle TAI = \angle TAD = \angle TED$ . Проведемо пряму  $IX$  таку, що  $IX \parallel BC$ ,  $X \in EA_1$ , і позначимо через  $E_1$  точку перетину прямої  $AX$  зі стороною  $BC$ . Оскільки чотирикутник  $DEAT$  – вписаний, то чотирикутник  $IATX$  – також вписаний. Тоді  $\angle ATI = \angle AXI = \angle AE_1D$ . Отже, достатньо довести



рівність  $\angle XE_1E = \angle XEE_1$ . З подібності відповідних трикутників з врахуванням властивості точки поділу бісектрис маємо:  $\frac{AA_1}{EE_1} = \frac{AX}{XE_1} = \frac{AI}{ID} = \frac{AC+AB}{BC}$ . Звідси, з послідовним врахуванням

рівнобічності трапеції  $BA_1C$  та теореми косинусів для трикутника  $ABC$ , одержимо

$$EE_1 = \frac{AA_1 \cdot BC}{AC+AB} = \frac{(BC - 2AB \cos \angle B) \cdot BC}{AC+AB} = \frac{AC^2 - AB^2}{AC+AB} = AC - AB.$$

Далі, з врахуванням рівності відрізків дотичних до вписаного кола, з рівностей  $AC - AB = CE - BE$  та  $EE_1 = CE - CE_1$  отримаємо, що  $BE = CE_1$ . Отже, пари точок  $A, A_1$  та  $E, E_1$  симетричні відносно серединного перпендикуляра до сторони  $BC$ , тому  $XE = XE_1$  та  $\angle XE_1E = \angle XEE_1$ . Тоді й  $\angle ATI = \angle TAI$ , звідки остаточно знаходимо, що  $IT = IA$ .

**5.** Для яких натуральних  $n \geq 3$  можна за скінченну кількість кроків з набору чисел  $1; 2; \dots; n$  отримати набір з  $n$  однакових чисел, якщо за один крок можна вибирати два довільних числа та збільшити кожне з них на довільне однакове натуральне число?

*Розв'язання.* Якщо  $n = 4k - 1$  чи  $n = 4k$ , то проробимо заміни:

$$(1; 3) \rightarrow (2; 4), (5; 7) \rightarrow (6; 8), \dots, (4k-3; 4k-1) \rightarrow (4k-2; 4k).$$

Далі, вибираючи пари  $(2; 2), (4; 4), \dots, (4k-2; 4k-2)$ , зробимо всі числа набору рівними  $4k$ . Якщо  $n = 4k + 1$ , то на першому етапі поступаємо аналогічно, а на другому, додатково вибираючи ще й пару  $(4k; 4k)$ , зробимо всі числа набору рівними  $4k + 1$ . І, нарешті, доведемо, що для  $n = 4k + 2$  вирівняти всі числа неможливо. Справді, сума  $1 + 2 + \dots + (4k + 2) = \frac{1}{2}(4k + 2)(4k + 3) = (2k + 1)(4k + 3)$  – непарна. Кожного разу ми збільшуємо її на парне число, тому отримати наприкінці, у разі всіх однакових чисел, парну суму не вдасться.

### Завдання тренувальної олімпіади

**1.** Знайдіть усі пари  $(p; n)$  простих чисел  $p$  та натуральних чисел  $n$  таких, що  $p^3 - p = n!$

*Розв'язання.* Безпосередньо переконаємося, що умову задачі задовольняють пари:  $(2; 3), (3; 4), (5; 5)$ . А для  $p > 5 \Leftrightarrow 2(p-2) > p+1$  зауважимо, що

$$p^3 - p: p \Rightarrow n!: p \Rightarrow n \geq p > 5 \Rightarrow n! \geq p! = p(p-1)(p-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 > > p(p-1) \cdot 2(p-2) > p(p-1) \cdot (p+1) = p^3 - p.$$

**2.** Нехай  $a, b, c$  – такі додатні числа, що  $ab + bc + ca = 1$ . Доведіть, що

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

*Розв'язання.* Оскільки з умови  $ab + bc + ca = 1$  випливає рівність

$$\left( \frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b} \right) + \left( \frac{1}{b+c} - \frac{bc}{b+c} \right) + \left( \frac{1}{c+a} - \frac{ca}{c+a} \right) = c + a + b,$$

то задача зводиться до доведення нерівності  $a + b + c \geq \sqrt{3}$ , справедливості якої отримуємо з нерівності  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca) = 3$ .

**3.** Нехай  $O$  – середина гіпотенузи  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$ . На катетах  $AC$  та  $BC$  вибрали точки  $M$  та  $N$  відповідно так, що  $\angle MON = 90^\circ$ . Доведіть, що  $MA^2 + NB^2 = MO^2 + NO^2$ .

*Розв'язання.* Нехай точка  $K$  симетрична до точки  $M$  відносно  $O$ . Тоді  $\triangle BOK = \triangle AOM$  (за двома сторонами і кутом між ними). Оскільки при цьому  $\angle MAB = \angle KBA$ , то  $BK \parallel AC$  і  $\angle NBK = 90^\circ$ . Також  $\angle KON = 90^\circ$ . Тому

$$MA^2 + NB^2 = KB^2 + NB^2 = NK^2 = KO^2 + NO^2 = MO^2 + NO^2.$$

4. На столі знаходяться 2016 монет. Двоє грають у гру, по черзі забираючи монети зі столу. За один раз можна взяти одну або дві монети. Крім того, один раз протягом гри кожен гравець має право забрати зі столу три монети. Програє той, хто не зможе зробити хід за вказаними правилами. У котрого з двох гравців є виграшна стратегія? Опишіть цю стратегію і доведіть, що вона справді приводить до перемоги.

*Розв'язання.* Переможе перший гравець. Для цього йому достатньо першим своїм ходом забрати зі столу дві монети, а далі на взяття суперником однієї монети відповідати забиранням двох монет, а на взяття суперником двох чи трьох монет – забиранням однієї монети доти, поки на столі після його ходу не залишаться 4 (якщо суперник жодного разу не взяв трьох монет) або 3 монети (якщо суперник скористався правом взяття трьох монет). Тоді наступним своїм ходом перший гравець зможе забрати зі столу решту монет, отже, і перемогти.

5. Нехай  $P(n)$  – найбільший простий дільник натурального числа  $n \geq 2$ ,  $[a]$  – ціла частина числа  $a$ . Для яких натуральних  $n \geq 2$  справджується рівність

$$P(n) + [\sqrt{n}] = P(n+1) + [\sqrt{n+1}] ?$$

*Розв'язання.* Оскільки  $P(n) \neq P(n+1)$ , то  $[\sqrt{n}] \neq [\sqrt{n+1}]$ . Тому  $n+1 = k^2$ . Отже, умову задачі можна записати у вигляді  $P(k^2 - 1) = P(k^2) + 1$ . Нехай  $P(k) = q$ . Тоді також  $P(k^2) = q$ , і приходимо до рівності  $P(k^2 - 1) = q + 1$ . Якщо  $q$  – непарне, то  $q + 1$  – парне число, більше за 2, а простий парний дільник числа  $k^2 - 1$  може лише дорівнювати 2. Тому  $q = 2$ . Отже,  $k = 2^m$ , що приводить до рівності  $P(4^m - 1) = 3$ . Звідси, враховуючи непарність числа  $4^m - 1$ , отримуємо  $4^m - 1 = 3^l$ . Якщо  $l \geq 2$ , то  $4^m - 1$  ділиться на 9, що можливо лише за умови  $m = 3s$ . Але у такому разі  $4^m - 1 = 4^{3s} - 1 = 64^s - 1$  ділиться на 63, отже, й на 7, що суперечить рівності  $P(4^m - 1) = 3$ . Тому  $l = 1$ , а далі послідовно отримуємо  $m = 1, k = 2, n = 3$ . Таким чином, єдиним шуканим числом є  $n = 3$ .