Федак І.В.

III етап Всукраїнської олімпіади з математики 2020р.

Умови задач

7 клас

1. Додатне число a на 20% менше числа b. На скільки відсотків число b більше, ніж число a?

2. Миколка хвалиться, що він знайшов натуральне число, добуток цифр якого у 2020 разів більший, ніж їх сума. Чи можуть його слова бути правдою? Якщо так, то вкажіть це число.

3. Визначте, за якого найменшого значення n можна викласти квадрат, використавши по n квадратиків розмірами 3×3 та 4×4.

4. О 9.00 командир роти відправив поштового голуба з повідомленням до штабу. Після цього рота стала рухатися у напрямі штабу зі швидкістю 6 км/год., а її розвідник – у протилежному напрямі зі швидкістю 4 км/год. Голуб полетів до штабу, передав повідомлення і, не затримуючись, повернувся до командира роти о 9.30. Знову не затримуючись, він полетів наздоганяти розвідника. О котрій годині голуб був у штабі та о котрій годині він наздожене розвідника, якщо швидкість його польоту становить 10 км/год.?

5. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вдовж озера від однієї з груш у протилежних напрямах і зустрілися біля іншої груші. По дорозі батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син. Продовжуючи рухатися у тих же напрямах, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син. Аналогічна ситуація повторилася і третій раз. Доведіть, що третя їхня зустріч відбулася біля тієї груші, від якої вони розпочинали свій рух першого разу.

8 клас

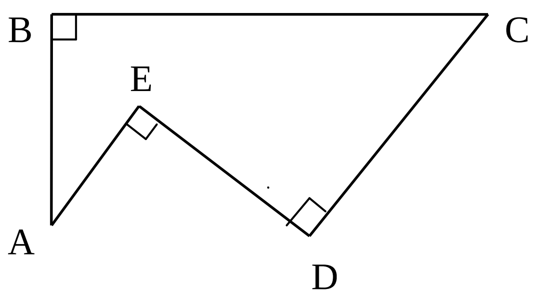
1. Вкажіть хоч один спосіб, як двома відрами місткістю 5 та 8 літрів відповідно відміряти рівно 1 літр води.

2. Знайдіть остачу та частку від ділення числа $8^{2020}+4^{2020}$ на число $8^{2018}+4^{2017}$.

3. Квадрат зі стороною 8см поділений на 64 квадратики зі стороною 1см. Сім таких квадратиків зафарбовані в чорний колір, решта – білі. Яку найбільшу площу в цьому квадраті може гарантовано (не залежно від розташування чорних квадратиків) мати прямокутник, який складається лише з білих квадратиків?

4. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вдовж озера від однієї з груш у протилежних напрямах і зустрілися біля іншої груші. По дорозі батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син, та втричі більше яблук на них. Продовжуючи рухатися у тих же напрямах, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син, та втричі більше яблук на них. Так само при третій їхній зустрічі під грушею батько також нарахував вдвічі більше яблунь, ніж син. Хто з них на третьому етапі нарахував більше яблук і в скільки разів?

5. У п’ятикутнику $ABCDE$ (див. мал. справа) відомі довжини чотирьох його сторін: $AB = 4$, $CD = 5$, $DE = 4$, $AE = 3$. Знайдіть довжину сторони BC.



9 клас

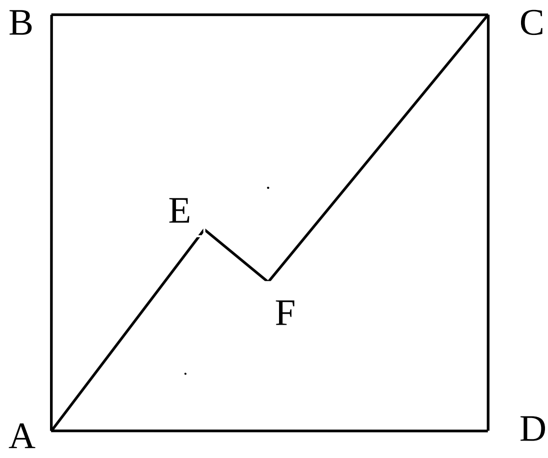
1. Знайдіть усі значення параметра a, за яких рівняння $ax^2 - 2x + 1 = 0$ не має двох різних дійсних коренів.

2. Серед 2020 однакових на вигляд монет одна монета фальшива, вона легша за інші. Марійка збирається виявити фальшиву монету, порівнюючи при кожному зважуванні маси двох купок з однаковою кількістю монет. Як їй гарантовано вдасться в такий спосіб виявити фальшиву монету за 7 зважувань?

3. Трицифрове натуральне число $\overline{abc} = a! + b! + c!$. Знайдіть це число і доведіть, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує. (Нагадуємо, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n;\ 0! = 1$).

4. Для дійсних чисел a та b таких, що $a+b=2$, доведіть нерівність $\left(a^2-a+1\right)\left(b^2+b+1\right)\geq 3$ та вкажіть усі пари таких чисел, для яких у ній досягається рівність.

5. У квадраті $ABCD$ вибрали точки E та F такі, що $AE=3$, $EF=1$, $CF=4$ та відрізок EF перпендикулярний до відрізків AE і CF (див. мал. справа). Знайдіть довжину сторони цього квадрата.



10 клас

1. Знайдіть усі трійки послідовних натуральних чисел, сума квадратів яких дорівнює 2020.

2. Скільки існує різних чотирицифрових чисел, добуток цифр яких у 20 разів більший, ніж їх сума?

3. На березі озера круглої форми ростуть, чергуючись одна з одною, яблуні та груші. Батько та син вирушили вдовж озера від однієї з груш у протилежних напрямах і зустрілися біля іншої груші. По дорозі батько нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, та в $n+1$ разів більше яблук на них. Продовжуючи рухатися у тих же напрямах, вони знову зустрілися біля груші. І знову батько нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, та в $n+1$ разів більше яблук на них. Аналогічна ситуація повторилася n разів. Для яких n могло статися так, що на наступному етапі батько знову нарахував в n разів більше яблунь, ніж син, але яблук на них вони нарахували порівну?

4. Всередині квадрата $ABCD$ вибрали точку E таку, що $AE=1$, $DE=2$, $CE=3$. Знайдіть у градусах величину кута AED.

5. Для додатних чисел a, b, c таких, що $a+b+c=3$, доведіть нерівність $\frac{a^2}{a+2}+\frac{b^2}{b+2}+\frac{c^2}{c+2}\geq 1$. Для яких a, b, c у ній досягається рівність?

11 клас

1. Доведіть, що для катетів AC та BC і висоти CH, проведеної до гіпотенузи AB прямокутного трикутника, виконується рівність

$$\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{CH^2}.$$

2. Шахову дошку покрили двадцять одним прямокутником розмірами 3×1 та одним квадратом зі стороною 1. Доведіть, що квадрат не може прилягати до краю дошки.

3. Миколка розставив замість * знаки «+» та «–» у виразі $2019^2*2018^2*2017^2*...*3^2*2^2*1^2$ і стверджує, що в результаті цього отримав 2020. Чи можуть його слова бути правдою?

4. Бісектриси AA_1, BB_1 та CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці I. Доведіть, що $\frac{AI}{IA_1}\cdot\frac{BI}{IB_1}\cdot\frac{CI}{IC_1}\geq 8$. Для яких трикутників досягається рівність?

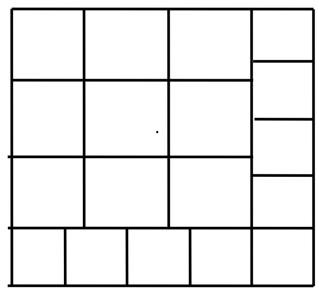
5. Доведіть, що число $\frac{2\sin10^\circ+\sin50^\circ}{2\sin80^\circ-\sqrt{3}\sin50^\circ}$ є ірраціональним.

Відповіді та вказівки до розв'язування задач

7.1. На 25%. З умови задачі маємо $a=0,8b$. Тоді $b=1,25a$.

7.2. Не можуть. Справді, $2020=20\cdot101$. Тому добуток цифр такого числа мав би ділитися на 101. Але це неможливе, бо 101 – просте число.

7.3. Площа такого квадрата дорівнюватиме $\left(3^2+4^2\right)n=25n$. Тому $n-$ точний квадрат. $n\neq1$, бо у квадраті 5×5 одночасно не помістяться квадратики 3×3 та 4×4. Також $n\neq4$, бо після розміщення у квадраті 10×10 чотирьох квадратиків 4×4 місця для квадратиків 3×3 уже не знайдеться. Приклад для $n=9$ наведений на малюнку справа.



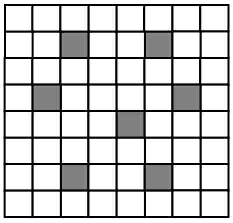
7.4. За пів години голуб пролетів 5 км, а рота пройшла у напрямі штабу 3 км. Різниця у 2 км дорівнює подвоєній відстані від штабу до місця зустрічі голуба з командиром роти. Тому від штабу до місця зустрічі голуб летів 6 хв. Отже, у штабі він був о 9.24. За ті ж пів години розвідник пройшов 2 км. Тому о 9.30 відстань між ним і голубом становила 5 км. Оскільки різниця швидкостей голуба і розвідника дорівнює 6 км/год., то голуб наздожене його через 50 хв. о 10.20.

7.5. З умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разові всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються і остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони починали свій рух.

8.1. Це, наприклад, можна зробити так. Спочатку набираємо 8 літрів води і переливаємо 5 літрів у п'ятилітрове відро. Виливаємо воду з цього відра і наливаємо в нього решту 3 літра. Знову набираємо 8 літрів води і доливаємо 2 літра у п'ятилітрове відро. Виливши всю воду з цього відра, знову наповнюємо його з восьмилітрового. Після таких операцій у восьмилітровому відрі залишиться рівно 1 літр води.

8.2. 0 та 64. Справді, $\dfrac{8^{2020}+4^{2020}}{8^{2018}+4^{2017}}=\dfrac{4^{2020}\left(2^{2020}+1\right)}{4^{2017}\left(8\cdot 2^{2017}+1\right)}=4^3=64$.

8.3. 8см^2. Не залежно від розташування 7 чорних квадратиків, знайдеться горизонталь, яка їх не містить. Прямокутник із клітинок цієї горизонталі має площу 8см^2.



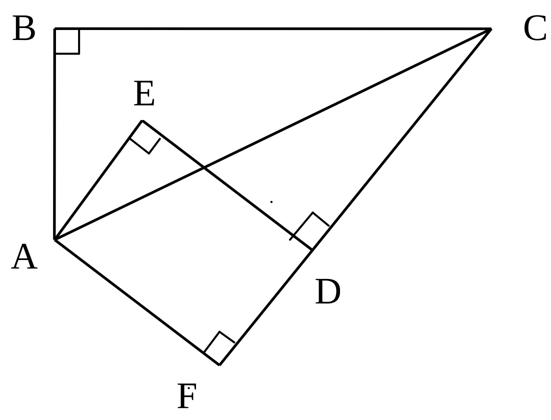
Приклад розфарбування семи квадратиків у чорний колір, при якому не існує прямокутника з більшою площею, наведений на малюнку справа.

8.4. Порівну. З умови задачі випливає, що син кожного разу нараховував третину від загального числа всіх яблунь. Тому після третього етапу їхнього руху ним були пораховані по одному разові всі яблуні. А оскільки яблуні та груші чергуються і остання зустріч також відбулася під грушею, то це є та сама груша, від якої вони починали свій рух. Зрозуміло, що при цьому сином також по одному разові були пораховані всі яблука на яблунях навколо озера. А оскільки на перших двох етапах він нараховував лише по четвертій частині від них, то на третьому етапі нарахував половину всіх яблук, стільки ж, як і батько.

8.5. Доповнимо ламану *AED* до прямокутника *AEDF* (див. мал. справа) і проведемо відрізок *AC*. Прямокутні трикутники

ABC та AFC рівні за рівними катетами $AB = AF$ та спільною гіпотенузою AC. Тому

$BC = CF = CD + DF = 5 + 3 = 8$.



9.1. $a = 0$ та $a \geq 1$. У першому випадку лінійне рівняння має один дійсний корінь, а у другому – дискримінант такого квадратного рівняння менший або дорівнює нулю.

9.2. Шуканим є число $145 = 1 + 24 + 120 = 1! + 4! + 5!$. Доведемо, що інших трицифрових чисел з такою властивістю не існує.

Справді, найбільша цифра такого числа не менша за 5, бо $4! + 4! + 4! = 72 < 100$. Вона не більша за 6, бо $7! + 0! + 0! = 5040 > 999$, та не дорівнює 6, бо навіть $6! + 0! + 0! = 722$ починається з цифри 7. Тому найбільша цифра шуканого числа дорівнює 5.

Всі три цифри такого числа не можуть бути рівними 5, бо $555 \neq 360 = 5! + 5! + 5!$. Так само не може бути двох цифр 5, бо тоді $0! + 5! + 5! = 241 \leq \overline{abc} \leq 4! + 5! + 5! = 264$, але $255 \neq 242 = 2! + 5! + 5!$.

Отже, в десятковому записі шуканого числа цифра 5 одна. Тому $1! + 0! + 5! = 122 \leq \overline{abc} \leq 4! + 4! + 5! = 168$, і його першою цифрою є цифра $a = 1$. Оскільки при цьому $\overline{abc} \leq 1! + 4! + 5! = 145$, то саме цифра $c = 5$, а $2 \leq b \leq 4$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що серед чисел 125, 135 та 145 лише останнє задовольняє умову задачі.

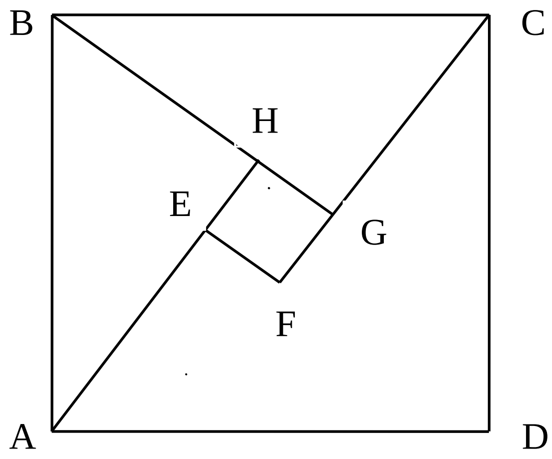
9.3. Спочатку розіб’ємо всі монети на 3 купки по 673, 673 та 674 монети і порівняємо маси перших двох купок. Якщо одна з них легша, то фальшива монета знаходиться саме в ній. Інакше – фальшива монета в третій купці. Вибираємо купку з фальшивою монетою і для зручності наступних міркувань доповнюємо кількість монет у ній до 729 справжніми монетами з інших купок. Ділимо цю купку на 3 рівні частини по 243 монети. Порівнявши маси двох із таких частин, аналогічно як при першому зважуванні знайдемо ту частину, яка містить фальшиву монету. Здійснюємо її поділ на 3 купки по 81 монеті і так само третім зважуванням визначаємо купку з фальшивою монетою. Четверте зважування зведеться до порівняння мас двох купок по 27 монет, п'яте – двох купок по 9 монет, шосте – двох купок по 3. І, нарешті, порівнюючи з трьох монет, які залишилися, дві, або зразу сьомим зважуванням виявимо фальшиву, або ж такою буде монета, яка не брала участі в останньому зважуванні.

9.4. Для зручності покладемо $a=1+x$ та $b=1-x$. Тоді

$$\left(a^2-a+1\right)\left(b^2+b+1\right)=\left((1+x)^2-(1+x)+1\right)\left((1-x)^2+(1-x)+1\right)=$$

$$=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-3x+3\right)=x^2(x-1)^2+3\geq 3.$$

Рівність досягається для $x=0$ та $x=1$, тобто для таких двох пар чисел: $a=b=1$ та $a=2,\ b=0$.



9.5. $AB=5$. Нехай $EFGH$ – квадрат (див. мал. справа). Його центр збігається з центром квадрата $ABCD$. Тоді прямокутні трикутники ABH та BCG рівні внаслідок рівностей $AB=BC$ та $\angle BAH=\angle CBG=90^\circ-\angle ABH$. При цьому $AH=4$, $BH=3$, тому за теоремою Піфагора $AB=5$.

Можна було також розглянути прямокутник $AEFK$. Потім з прямокутного трикутника з катетами 1 та 7 знайти його гіпотенузу $AC=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, а прямокутного трикутника ABC – його катет $AB=5$.

10.1. Таких трійок послідовних натуральних чисел не існує. З рівності $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=2020$ випливає, що $3n^2=2018$. Але 2018 не ділиться на 3.

10.2. Таких чисел є 36. Нехай умову задачі задовольняє число з цифрами a, b, c, d, не обов'язково саме у такому порядку. Тоді

$$abcd=20(a+b+c+d). \qquad (**)$$

Отже, принаймні одна цифра такого числа має бути кратна 5. Цифра 0 не задовольняє рівність (**), тому, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $d=5$. При цьому рівність (**) можна записати у вигляді

$$abc = 4(a+b+c+5). \qquad (***)$$

Звідси випливає, що принаймні одна з цифр a, b, c є парною і відмінною від нуля. Нехай для конкретності такою є цифра c. Розглянемо чотири можливі при цьому випадки:

1). $c = 2$. Тоді з (***) отримуємо

$$ab = 2(a+b+7) \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 18,$$

звідки знаходимо $a = 5, b = 8$ чи $a = 8, b = 5$. Враховуючи можливі перестановки цифр 2, 5, 5, 8, будемо мати 12 шуканих чисел.

2). $c = 4$. Тоді з (***) отримуємо

$$ab = a+b+9 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 10,$$

звідки знаходимо $a = 3, b = 6$ чи $a = 6, b = 3$. Враховуючи можливі перестановки цифр 3, 4, 5, 6, будемо мати ще 24 шукані числа.

3). $c = 6$. Тоді з (***) отримуємо

$$3ab = 2(a+b+11) \Leftrightarrow (3a-2)(3b-2) = 70,$$

звідки знаходимо $a = 3, b = 4$ чи $a = 4, b = 3$. Враховуючи можливі перестановки цифр 3, 4, 5, 6, матимемо той самий набір шуканих чисел, що і у випадку 2.

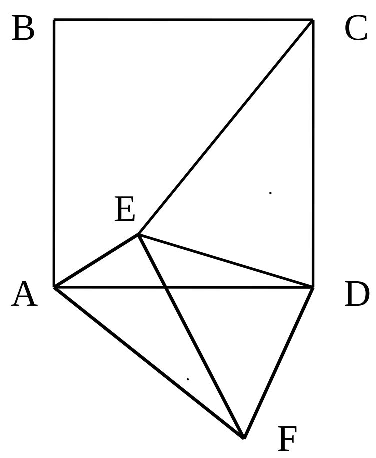
4). $c = 8$. Тоді з (***) отримуємо

$$2ab = a+b+13 \Leftrightarrow (3a-1)(2b-1) = 27,$$

звідки знаходимо $a = 2, b = 5$ чи $a = 5, b = 2$. Враховуючи можливі перестановки цифр 2, 5, 5, 8, отримаємо той самий набір шуканих чисел, що і у випадку 1.

10.3. Для $n = 2$. Син кожного разу нараховував $\frac{1}{n+1}$ від загального числа всіх яблунь. Після $(n+1)-$го етапу ним були пораховані по одному разові всі яблуні. Отже, остання зустріч відбулася під грушею, від якої вони починали свій рух. При цьому сином по одному разові були пораховані і всі яблука на яблунях навколо озера. На перших n етапах він нараховував по $\frac{1}{n+2}$ частині від них, а на останньому – половину. З рівності $\frac{n}{n+2} + \frac{1}{2} = 1$ знаходимо $n = 2$. Така ситуація реальна, якщо, наприклад, дерева росли на однакових відстанях між сусідніми з них, батько рухався вдвічі швидше за сина і на перших двадцяти яблунях син нараховував по 10 яблук, а на решти десятьох – по 20.

10.4. 135°. Нехай $\Delta\, DAF = \Delta\, DCE$ (див. мал. справа). Його центр збігається з центром квадрата $ABCD$. Тоді у рівнобедреному прямокутному трикутнику FDE маємо $FE = 2\sqrt{2}$ та $\angle FED = 45^\circ$. При цьому $AE^2 + FE^2 = AF^2$, тому $\angle AEF = 90^\circ$. Отже, $\angle AED = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.



10.5. Для додатних чисел x та y справджується нерівність

$$\frac{x^2}{y} \geq 2x - y \Leftrightarrow \left(x-y\right)^2 \geq 0,$$

причому рівність у ній можлива лише за умови $x = y$. Звідси

$$\frac{a^2}{a+2} + \frac{b^2}{b+2} + \frac{c^2}{c+2} = \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{(3a)^2}{a+2} + \frac{(3b)^2}{b+2} + \frac{(3c)^2}{c+2}\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{9}\cdot\left(6a - (a+2) + 6b - (b+2) + 6c - (c+2)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\left(5(a+b+c) - 6\right) = \frac{1}{9}\cdot(5\cdot 3 - 6) = 1.$$

Рівність досягається лише за одночасного виконання умов $3a = a+2,\ 3b = b+2,\ 3c = c+2,\ a+b+c = 3,$ тобто для $a = b = c = 1$.

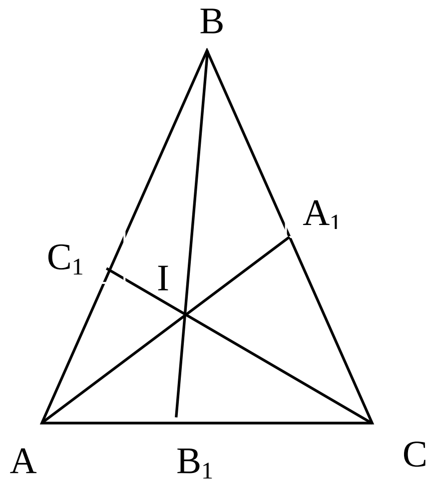
11.1. Оскільки за теоремою Піфагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, то вказана в умові задачі рівність рівносильна рівності $AC \cdot BC = AB \cdot CH$, ліва і права частини якої дорівнюють подвоєній площі трикутника ABC.

11.2. Припустимо, що квадрат прилягає до краю дошки. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що він знаходиться на першій горизонталі. Запишемо у кожній клітинці дошки номер горизонталі, на якій знаходиться ця клітинка. Сума всіх записаних чисел дорівнює 288 і ділиться на 3. Так само на 3 ділиться й сума чисел, які покриє кожний прямокутник 3×1, а квадрат зі стороною 1 покриває цифру 1. Отримана суперечність доводить, що він не може прилягати до краю дошки.

11.3. Можуть. Допишемо справа до заданого виразу $*0^2$, що жодним чином не вплине на отримане після розстановки знаків «+» та «–» значення цього виразу. Тоді згрупуємо всі доданки зліва направо в 505 груп по 4 доданки в кожній. Для всіх натуральних чисел n справджується рівність $(n+2)^2-(n+1)^2-n^2+(n-1)^2=4$, тому для кожної такої групи ми зможемо отримати суму чисел, яка дорівнює 4. Відповідно, значення всього виразу буде $505\cdot 4=2020$.

11.4. За властивістю бісектрис

$$\frac{AI}{IA_1}=\frac{AB}{BA_1} \text{ та } \frac{AI}{IA_1}=\frac{AC}{CA_1}=\frac{AC}{BC-BA_1}.$$



Тому $\frac{AB}{BA_1}=\frac{AC}{BC-BA_1}$, звідки отримуємо $BA_1=\frac{BC\cdot AB}{AB+AC}$. Внаслідок першої із записаних рівностей $\frac{AI}{IA_1}=\frac{AB+AC}{BC}$.

Отже,

$$\frac{AI}{IA_1}\cdot\frac{BI}{IB_1}\cdot\frac{CI}{IC_1}=\frac{AB+AC}{BC}\cdot\frac{BA+BC}{AC}\cdot\frac{CB+CA}{AB}\geq$$

$$\geq\frac{2\sqrt{AB\cdot AC}}{BC}\cdot\frac{2\sqrt{BA\cdot BC}}{AC}\cdot\frac{2\sqrt{CB\cdot CA}}{AB}=8,$$

причому рівність можлива лише для рівностороннього трикутника.

11.5. $$\frac{2\sin 10^\circ+\sin 50^\circ}{2\sin 80^\circ-\sqrt{3}\sin 50^\circ}=\frac{2\sin\left(60^\circ-50^\circ\right)+2\cos 60^\circ\sin 50^\circ}{2\cos\left(60^\circ-50^\circ\right)-2\sin 60^\circ\sin 50^\circ}=$$

$$=\frac{\sin 60^\circ\cos 50^\circ}{\cos 60^\circ\cos 50^\circ}=\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}.$$

Це число ірраціональне, бо з рівності $\sqrt{3}=\frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – нескоротний дріб, отримуємо $m^2=3n^2$, тобто $m=3k,\ k\in\mathrm{N}$. Тоді $n^2=3k^2$, тому n також ділиться на 3. Суперечність.